Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Educación

Departamento de Investigación y Postgrados

Maestría en Docencia de las Matemáticas

Implementación y Aplicación de Prácticas de Laboratorio Experimental para el Aprendizaje de Geometría Plana en el Décimo Año de E.G.B del Colegio Rafael Borja

TESIS PREVIA LA OBTENCIÓN
DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR:

PATRICIO FABIÁN ABRIL PERALTA

DIRECTOR:

MÁSTER PATRICIO ERNESTO FEIJOÓ CALLE

Cuenca, julio 2013

RESUMEN

El problema de investigación “Implementación y Aplicación de Prácticas de Laboratorio Experimental para el Aprendizaje de Geometría Plana en el Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja”.

Los resultados de dicha investigación han permitido mejorar del aprendizaje del bloque de Geometría en estudiantes de la asignatura de Matemática del Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja, mediante el empleo de prácticas experimentales de laboratorio utilizando, para ello, herramientas didácticas basadas en el uso de software matemático y el material concreto.

La investigación de diseño cuasi-experimental se ha utilizado para el contraste de la hipótesis, la prueba “t” para datos relacionados. Además, se desarrollaron 28 prácticas que no pretenden ser un manual, sino simplemente ideas y propuestas plasmadas en guías de aprendizaje para que se las considere y mejore. Los datos recogidos en las pruebas exploratorias, informes de laboratorio, encuestas se analizaron utilizando estadística descriptiva. Los hallazgos del estudio fueron: los conocimientos de los estudiantes mejoraron; estos pusieron en práctica sus habilidades cognoscitivas y metacognoscitivas. Por lo tanto, el estudio aportó evidencias para usar el software matemático y el material concreto, como herramientas didácticas en las prácticas experimentales bajo una metodología constructivista.

PALABRAS CLAVES: Prácticas de laboratorio, software matemático, material concreto, geometría activa, aprendizaje.

ABSTRACT

The research problem " Implementation and Application of Experimental Laboratory Practice for Learning Plane Geometry in the Tenth Year Education General Basic in the Rafael Borja High School.

The results of this research have improved the students' learning of the Geometry block in the Mathematics subject. Students of Tenth Year Education General Basic in the Rafael Borja High School have increased their learning by using experimental laboratory practices through instructional tools such as mathematical software and concrete material.

The quasi -experimental design research has facilitated to contrast the hypothesis and the "T" test has helped to compare related data. Also, this investigation has enabled to develop 28 practices that they are grouped in learning guides that teacher and students could consider and improve. The data collected in the exploratory tests, laboratory reports, and surveys were analyzed using the descriptive statistics. The results of this research proved that students' knowledge were improved and that students has developed their cognitive and metacognitive skills. Therefore, this work provides enough evidence to use mathematical software and concrete material as pedagogical teaching tools in the experimental practices through a Constructivist Methodology.

KEYWORDS: laboratory practices, mathematical software, concrete materials, geometry active learning.

TABLA DE CONTENIDOS.

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Fundada en 1867

Yo, Patricio Fabian Abril Peralta, autor de la tesis "Implementación y Aplicación de Practicas de Laboratorio Experimental para el Aprendizaje de Geometría Plana en el Décimo Año de E.G.B del Colegio Rafael Borja", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Maestría en Docencia de las Matemáticas. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, a 21 de octubre de 2013

Patricio Abril Peralta
0101566305

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999

Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Fundada en 1867

Yo, Patricio Fabian Abril Peralta, autor de la tesis "Implementación y Aplicación de Practicas de Laboratorio Experimental para el Aprendizaje de Geometría Plana en el Décimo Año de E:G:B del Colegio Rafael Borja", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 21 de octubre de 2013

Patricio Fabián Abril Peralta.
0101566305

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999
Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

DEDICATORIA

El presente trabajo investigativo, lo dedico a mi madre, Blanca Luz, que con su cariño me enseñó a formarme en valores y ser una persona de bien; a mi esposa Eulalia por todo el apoyo, amor y comprensión que supo brindarme y a mi querido hijo Juampa, fuente de inspiración para alcanzar esta meta propuesta.

Patricio Fabián Abril Peralta

AGRADECIMIENTO

Mi reconocimiento de gratitud para quienes hicieron posible que este trabajo de investigación llegue a su culminación.

A la **Universidad de Cuenca**, por darme la oportunidad de capacitarme y ser un mejor profesional al servicio de la juventud de mí patria.

Al M**áster Patricio Feijoo Calle**, por su acertada asesoría y dirección en el desarrollo del presente trabajo.

Patricio Fabián Abril Peralta

INTRODUCCIÓN

Este tema de investigación pretende mejorar el aprendizaje de la Geometría en el Décimo año de Educación General Básica, introduciendo nuevas estrategias que han ido surgiendo en estos últimos años, con el firme propósito de cambiar la enseñanza de la Geometría en beneficio de los estudiantes. Paralelamente a este anhelo y movido por un afán de superación personal y formación permanente, pretendo implementar prácticas sencillas de laboratorio, provistas de software matemático y material concreto para que sean una alternativa de solución a la problemática de la enseñanza reflejada en la falta de: atención, actividad, motivación e interés que presentan los estudiantes cuando el docente esgrime la educación tradicional.

Llevar a cabo este proyecto me ha permitido avanzar en el conocimiento y desarrollo de estudios más particularizados y prácticos en el uso de software matemático como elemento diferenciador en la forma de enseñar, mejorando la calidad del aprendizaje. Trabajar con grupos de estudiantes, fomenta el aprendizaje colectivo, este trabajo de investigación se inscribe claramente dentro de esta óptica. En un laboratorio, los alumnos trabajan en grupos pequeños recopilando información, tomando medidas, analizando los datos, construyendo gráficas, obteniendo conclusiones, haciendo predicciones y reflexionando sobre los conceptos fundamentales involucrados en la actividad. Por lo que pretendo que el profesor que utilice las guías de prácticas diseñadas para el estudio de la Geometría de Décimo Año, rompa con la monotonía que frecuentemente invade las aulas donde se imparte matemática; pase de simple expositor a facilitador, generando en los estudiantes un ambiente de creatividad, alegría, motivación y compromiso en cada una de las prácticas.

Como antecedentes de este estudio, puedo citar:

a) Los estudiantes del Décimo Año de Educación General Básica del colegio Rafael Borja en las destrezas de los bloques: numérico, de relaciones y funciones presentan poco interés en aprender Geometría, desconocen las fórmulas para el cálculo de áreas, volúmenes y perímetros, de figuras regulares como el rombo, trapecio, triángulo, rectángulo por nombrar algunas, no distinguen entre un prisma y una pirámide. Si a esto agregamos la dificultad que tienen en interpretar el enunciado de un problema, comprobamos que la poca motivación y la falta de atención de los estudiantes en estos temas, se debe a su baja participación, por ser estos expositivos o mecánicos. Se visualiza entonces que para mejorar el interés y la participación de los estudiantes, es necesaria la aplicación de prácticas de laboratorio experimentales como herramienta didáctica.

b) Entre los principales problemas de aprendizaje, que el estudiante presenta están: la falta de motivación para la investigación y la lectura, malos hábitos de estudio, actitud pasiva, falta de razonamiento, muy poco compromiso del estudiante con su aprendizaje, entre otros; se registran los mismos problemas, cuando se imparte los contenidos de Geometría Plana, estos se convierten en algo difícil de asimilar sin la ayuda de alguna estrategia didáctica que permita visualizar y manipular las figuras.

c) El estudiante del nuevo milenio exige un aprendizaje de calidad y calidez, ya no se conforma con aprender de una forma pasiva, siendo un mero espectador. El estudiante actual se entusiasma con el movimiento, el sonido, las imágenes, los simuladores, quiere ser el protagonista; le gusta tocar, manipular. Por estos motivos considero de vital importancia que las estrategias metodológicas y didácticas con las que veníamos trabajando, deben mejorar, innovarse, tienen que irse acoplando en el menor tiempo posible con la nueva tecnología.

d) La Geometría, por su esencia, constituye uno de los pilares de la matemática, por tanto se convierte en una herramienta clave para desarrollar el pensamiento lógico, critico, reflexivo de nuestros estudiantes. En general, la enseñanza de la geometría ha tenido grandes dificultades, perdiendo importancia dentro de los planes de estudio. Debido a estos antecedentes, el Ministerio de Educación ha decidido impulsar el aprendizaje y enseñanza de ésta importante rama de la matemática, lo que se pone de manifiesto en la Actualización y Fortalecimiento de la Reforma Curricular de 2010.

e) En años anteriores, en el ciclo básico, hoy octavo, noveno y décimo de Educación General Básica, la carencia de conocimientos de Geometría era evidente, su estudio no era trascendental; situación similar sucede en la actualidad, en donde de acuerdo a la distribución de la malla curricular que presentan varios docentes, damos prioridad el momento de planificar a los bloques de Álgebra, Trigonometría y Estadística, dejando el módulo de geometría para analizar en el último mes del año lectivo, que por lo general es muy corto, corriendo el riesgo de que el docente por falta de tiempo aborde los contenidos de una manera apresurada, los analice a medias o no los estudie, provocando vacíos que en lo posterior repercuten en el aprendizaje de los estudiantes, dando como resultado una educación en Geometría carente de conocimientos sólidos, sin objetivos concretos, sin una planificación coherente, lo que incide directamente en la falta de interés de los estudiantes por aprender Geometría.

Con la aplicación de las prácticas experimentales de laboratorio se mejoró el aprendizaje de la Geometría de los estudiantes de Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja. Dando importancia al uso del software matemático y al material concreto como herramientas mediadoras del proceso de interaprendizaje. Para desarrollar destrezas y lograr que el nuevo conocimiento se fije en el alumno es imprescindible la manipulación de material concreto y la aplicación de un software educativo especializado, de tal manera que podamos llevar ese conocimiento a un nuevo escenario, el laboratorio, es ahí donde se involucra la creatividad y se concluye el proceso de aprender haciendo.

El uso de material didáctico en una práctica de laboratorio, establece una relación dialéctica entre los materiales didácticos manipulables y la actividad matemática. A su vez, se convierten en elementos generadores de actividad mental, de dinamismo que se contraponen con la pasividad externa que se manifiesta en los estudiantes que escuchan la explicación magistral de un profesor.

El laboratorio de matemática es un buen soporte académico que hará posible que los estudiantes comprendan que las actividades de enseñanza si se puedan realizar en condiciones significativas y de esta manera ampliar y reforzar los conocimientos adquiridos en clase.

Finalmente, la tesis sigue el siguiente orden: En el primer capítulo: se realiza una descripción de la situación actual del aprendizaje de la geometría, partiendo desde un enfoque conductista hasta llegar al constructivismo. También se explica la importancia del software especializado y el material concreto como elementos de apoyo que generan ambientes de aprendizajes significativos a través del uso de estrategias nuevas como las practicas experimentales. En el segundo capítulo se aborda el tratamiento estadístico descriptivo cuantitativo y cualitativo aplicado a la población de estudiantes del Décimo Año de Educación General Básica, tanto al grupo de control como al grupo de intervención con cuadros y tablas que corroboran el rechazo de la hipótesis nula. Finalmente en el tercer capítulo se enfatiza la formulación de una propuesta de aprendizaje de la geometría por destrezas con criterio de desempeño por medio de 28 guías de prácticas experimentales de laboratorio.

CAPITULO I

Un acercamiento a la situación actual del aprendizaje de la Geometría

1.1. Situación actual

La matemática durante mucho tiempo fue enseñada a base de la repetición y la memorización de ejercicios modelo. Los métodos de enseñanza, usados por la gran mayoría de los profesores probablemente dieron buenos resultados en el pasado, pero no están dando buenos resultados en el presente, lo que se puede evidenciar en los resultados de las pruebas SER aplicadas al cuarto, séptimo y décimo, años de Educación General Básica, así también al tercero de bachillerato, en donde se obtuvieron promedios muy bajos en matemática.

El Ecuador, entre otros países de Latinoamérica, se están preocupando de que la enseñanza mejore sustancialmente, se transforme, tenga otra visión y para ello el Ministerio de Educación, a través de sus diferentes distritos está empeñado en mejorar la infraestructura de los establecimientos, cambiar el sistema de evaluación y capacitar a los docentes mediante cursos de perfeccionamiento presencial, semipresencial y virtual en diferentes áreas de la educación; necesitamos cambiar de estrategias educativas y una alternativa nueva sería la utilización de material concreto y software matemático, como herramientas de apoyo en la *aplicación de prácticas experimentales de laboratorio de Geometría.*

Hoy, a inicios del siglo XXI, estamos inmersos en un mundo digitalizado, en donde es irreversible el incremento en el uso de la tecnología. La educación, obviamente, no está exenta de ello. Existen muchas aplicaciones tecnológicas que son utilizadas en las aulas, pero siempre de forma monótona y no hay demasiada innovación en su uso, por lo que urge la presencia de estrategias metodológicas, que estimulen el proceso de interaprendizaje.

Actualmente para mejorar la educación tradicional existen muchos modelos alternativos, algunos más y otros menos exitosos, uno de estos modelos es la llamada educación virtual, que consiste en que el estudiante logre conocimientos a través de la mediación de herramientas tecnológicas como el software matemático que permite: experimentar, resolver problemas, desarrollar capacidades para interpretar, operar, crear imágenes, modelos de simulación, graficadores interactivos, tratamientos de datos experimentales y laboratorios virtuales entre otras bondades.

1.2. Aprendizaje de la Geometría

Actualmente, la teoría del conductismo para muchos docentes es muy familiar, ciertas características o rasgos los aplicamos a diario en nuestra aula, a pesar de las críticas nadie puede negar que existan aspectos que pueden ser rescatados en esta perspectiva pedagógica, especialmente cuando se trabaja en ambientes de laboratorio experimental. Sin embargo, aspectos del constructivismo son imprescindibles para una buena práctica como la retroalimentación de aprendizajes. "*El refuerzo retroalimentador del aprendizaje, que permitirá saber a los estudiantes si acertaron o no, si lograron la competencia y el objetivo de la práctica. Mientras el refuerzo no ocurra, los estudiantes tendrán que ocuparse de observar, aprender a usar los conceptos matemáticos en forma práctica e informarse sobre el tema que se está analizando hasta lograr el objetivo propuesto*." (McBrian 10). Esta es precisamente la respuesta que se tiene que ensayar, ajustar, afinar, hasta lograr obtenerla y que se definirá en las conclusiones de la práctica. Con este enfoque lo que se persigue en las prácticas de laboratorio, es aprender haciendo.

John Dewey, Jean Piaget y Vygotsky: investigador, psicólogo y científico respectivamente, consideran al constructivismo como la ciencia del aprendizaje, en donde la persona construye su propio conocimiento, basándose en lo que ya conoce. "*En este modelo se promueve el uso de actividades prácticas o manuales impulsando a los estudiantes a pensar y explicar su razonamiento, en lugar de recitar y memorizar información*" (Cuevas 16). El estudiante aprende mejor cuando adquiere conocimiento a través de la manipulación, exploración, la investigación y la experimentación.

En el aula constructivista "*los estudiantes están más dispuestos a compartir estrategias directamente del profesor, son más propensos a trabajar cooperativamente en pequeños grupos para dar forma y formular de nuevo sus conceptos, en vez de practicar sus destrezas de manera pasiva en sus asientos*" (Hull 38). Es más probable que estos estudiantes se involucren en actividades prácticas, de laboratorio experimental que en escuchar clases expositivas. En el aula constructivista el docente genera en sus estudiantes un ambiente de interés, de confianza y de necesidad de aprender.

En mi experiencia de 25 años en el magisterio, he observado muchos docentes excelentes creando estos ambientes en sus aulas. Estos maestros han obtenido distinciones, son profesores que triunfan con aquellos estudiantes, frente a los cuales otros profesores se han dado por vencidos, son pedagogos que los padres quieren para sus hijos, en otras palabras son educadores que marcan la diferencia en la forma como enseñan a sus estudiantes. A pesar de que muchos de ellos no conocen las investigaciones ni de los descubrimientos del constructivismo, ni su definición, sus aulas fueron y son modelo del constructivismo.

"*La experimentación es una estrategia que ayuda a incorporar en los alumnos, nuevos conocimientos a través de experiencias aplicadas, programadas por el docente para realizarlas en el aula. Consiste en aprender en el contexto del descubrimiento e invención"* (Frederiksen 118). Concretamente es aprender haciendo, por medio de actividades manipulables, actividades de resolución de problemas y actividades de laboratorio; se obtienen datos de: lados, radios, alturas, ángulos, que luego de ser procesados demuestran una ley o regla[1] y con su aplicación se resuelven problemas.

"*En las prácticas experimentales de laboratorio, el docente no solo debe preocuparse del diseño de la práctica, sino también del que aprendan, cómo aprenden y cómo se relaciona lo uno con lo otro*" (Mora 87). Esto ubica al docente frente a problemas teórico-prácticos en donde el conocimiento, experiencia y habilidad le permitirán guiar exitosamente al estudiante desde el instante en que este obtiene la información, luego la procesa y transforma valiéndose ya sea de instrumentos de medición, de material concreto o software educativo, hasta llegar a organizarla y enriquecerla en el desarrollo de una práctica experimental de laboratorio.

Rosmarie Terán explica la concepción de Ausubel de aprendizaje significativo: "*Se produce únicamente cuando favorece la comprensión,*[2] *al permitir que las nuevas ideas se vinculen con las que el estudiante ya posee. En cambio, cuando la relación es arbitraria, esto es, cuando las nuevas ideas no se conectan con las existentes, estamos ante el aprendizaje memorístico. Una cosa, entonces es la comprensión y otra la memoria. Y aprender es fundamentalmente comprender*" (34). En las prácticas de laboratorio el estudiante no aprende de una forma mecánica, repetitiva; lo hace razonando, dando sentido y significado a sus aprendizajes involucrando para ello, no solo la memoria y repetición, sino la asimilación de conocimientos, para ello es condición indispensable tener en cuenta lo que el estudiante ya sabe sobre aquello que se le quiere enseñar.

"*En el trabajo de aula es fundamental generar procesos de mediación que tiendan a potenciar aprendizajes significativos y permanentes, para ello, como se ha manifestado anteriormente, es preciso tener en cuenta que los alumnos no son los destinatarios de los procesos de enseñanza, sino actores, en torno a quienes deben girar las estrategias didácticas que manejan los docentes*" (Feuerstein 36). En el desarrollo de las prácticas de laboratorio de Geometría plana, el acompañamiento de un mediador en el proceso de interaprendizaje, su orientación y apoyo son fundamentales, hasta que el estudiante adquiera las capacidades intelectuales y emocionales que le permitan comprender la información, conocimientos y experiencias nuevas, que en lo posterior nos llevaran a modificar las estructuras cognitivas, la capacidad creativa y la participación activa del estudiante.

[1] Formulas del área y volumen de figuras regulares
[2] Asimilación de significados

1.3. Material concreto

En Holanda, España y Suiza, se está realizando investigaciones sobre como incide en la enseñanza de la matemática y en especial de la Geometría, el uso del material concreto y software educativo como herramientas didácticas, así podemos encontrar que a través de la papiroflexia[3] se puede enseñar algunos elementos y figuras de la geometría. Un ejemplo de esto es la "Geometría con papel" (Suárez 23) que tiene muchos usos didácticos. Por ejemplo recortar círculos de diferente radio, luego doblar al papel de modo que los extremos del círculo concurran al centro, se observa que se forma un triángulo equilátero, si a este triángulo se le doblan los vértices de tal manera que coincidan en el centro del círculo, se construye un hexágono regular, en donde tomando datos del radio, se puede calcular el área comprendida entre el círculo y el hexágono, de igual manera mediante procedimientos similares se pueden construir otras figuras regulares[4].

Los materiales didácticos pueden contribuir a establecer una relación entre la teoría y la práctica, "*Los materiales por si solos, no producen los efectos esperados y solo los maestros con sus mediaciones pedagógicas pueden potenciarlos como herramientas de conocimiento*" (Nerici 18). El uso de cualquier material concreto o software educativo aplicado aisladamente no se convertirá en una estrategia didáctica eficaz, para desarrollar destrezas con criterio de desempeño, necesita la mediación de un docente que haga el papel de facilitador para que cree y motive entornos de aprendizajes ricos en recursos educativos.

Se ha observado que cuando en los estudiantes realizan actividades de manipulación, estos despiertan interés por crear e investigar varias cosas, por ejemplo: de qué partes está constituida una figura, que nombres tienen, cuál es el rol de este elemento dentro de la figura, qué pasaría si faltara uno de ellos. Por lo anterior se puede considerar que: "*Actividades de manipulación, son actividades en las cuales los estudiantes pueden trabajar con objetos simples para modelar conceptos abstractos de manera concreta*" (Hernández 7). En consecuencia, el uso de material didáctico como: las barajas de función, varilla de mecano, mira, geoplano, puzzles pitagóricos, dominó, combi de áreas y perímetros, regletas de áreas, tangram etc., mejoran la enseñanza aprendizaje de la Geometría sustancialmente, sobre todo porque permite realizar una diversidad de variantes para analizar algunas figuras de la Geometría plana, pues al unir varias piezas, se puede llegar a determinar algunas propiedades de los ángulos, lados, bisectrices, diagonales, perpendiculares y llegar a conceptos importantes.

El uso de material concreto es una estrategia que el docente utiliza para mejorar el interaprendizaje, responde a la necesidad que tiene el estudiante de manipular y explorar lo que hay en su entorno ya que de esa manera aprende. Al hacer uso de material concreto estaremos facilitando el aprendizaje en el dicente, ya que le

[3] A través de los dobleces de papel o papiroflexia se puede formar figuras geométricas
[4] Triángulos isósceles, equiláteros, trapecios, rombos, romboides y otros

brindamos herramientas que lo aproximen a las capacidades que se desea desarrollar en él; estos recursos ofrecen entre otros los siguientes beneficios: propicia el trabajo cooperativo, estimula la observación y experimentación, favorece la crítica y la reflexión, desarrolla la actividad creadora, fomenta la investigación, estimula el ejercicio de actividades que contribuyen al desarrollo de nuevas habilidades, destrezas, hábitos y actitudes, permite el descubrimiento de la relación causa- efecto, contribuye al uso de herramientas para la solución de problemas, posibilita el desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes.

La selección y uso de los materiales didácticos se hace atendiendo a una visión sistemática del currículo, por lo que deben estar en conexión con los objetivos o propósitos, con los aprendizajes esperados, con las estrategias y actividades, así como también con los intereses, capacidades y habilidades de los estudiantes que van a utilizar el material.

En función de lo expuesto, el docente antes de planificar una guía de prácticas debe analizar las actividades propuestas para el inicio, desarrollo y cierre de la misma. Este es el momento de reflexionar sobre cual o cuales materiales son los más adecuados para la consecución de los aprendizajes esperados, cuáles actividades pueden ser enriquecidas o reemplazadas por otras que respondan mejor a las características del grupo, a sus intereses y necesidades. Luego de esta reflexión, se procede a planificar el uso del material concreto que en nuestro caso para enseñar Geometría es de tipo fijo, 2D y 3D, no tóxico ni tampoco nocivo para la salud, como: las láminas foamy o goma EVA de colores intensos, el tangram, el cartabón, el rompecabezas geométrico, el Geoplano, las transformaciones dinámicas y otros, que se utilizan de acuerdo a la intencionalidad didáctica.

De la experiencia rescatada del aula se puede argumentar que el material concreto es un vehículo que nos ayuda a transitar de una manera más eficaz por los procesos de interaprendizaje de la Geometría[5], proporcionando a los estudiantes nuevos caminos para: pensar, razonar, deducir, inferir y dar sentido a lo que se aprende, fomentando la iniciativa, la creatividad, la imaginación entre otras cosas:

a) El desarrollo de destrezas, habilidades y aptitudes en los estudiantes para que, a través del razonamiento lógico, conozcan el ¿por qué?, el ¿cómo?, y el ¿para qué? de las cosas y así lleguen a un aprendizaje significativo.

b) Aplicar el material concreto en el aprendizaje facilita la exploración de conocimientos y la solución de problemas desde el orden lógico.

c) Los estudiantes cuando trabajan con material concreto se enfrentan al desafío de hacer todas las combinaciones antes de llegar a resolver el problema o la situación que plantea la Geometría.

[5] Fase práctica, fase de lo concreto, fase gráfica, fase simbólica o abstracta y fase de aplicación.

d) El uso de material concreto obliga a los estudiantes a usar diferentes estrategias antes de encontrar la respuesta a la operación matemática.

1.4. Construcción de conceptos matemáticos

Consideramos coherente, antes de analizar el software matemático como tal, realizar ciertas acotaciones sobre la construcción de conceptos en el aula de matemática, en donde el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de estos conceptos teóricos, que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como fundamentales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos. La problemática del uso de la computadora y la calculadora gráfica para la construcción de conceptos matemáticos, el desarrollo tecnológico impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en su representación. Sabemos que las representaciones de un concepto matemático solo constituyen una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión.

Ahora con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado. Desde esta perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es la parte central; Duval señala que: "...*estamos en presencia de lo que se podría llamar la paradoja, cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos*" (175).

De lo anterior sobre la construcción de los conceptos matemáticos podemos establecer que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. Dentro de este marco de referencia, la visualización matemática de un problema juega un papel importante y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión lo que nos permitirá realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. Por esta razón consideramos fundamental realizar un análisis de la visualización matemática.

1.5. Visualización matemática

La visualización matemática según Zimmermann nos dice que ¨*no es otra cosa que una habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual*¨ (67). En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático. La visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo, lo relacionamos directamente con la capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema. Por ejemplo podemos percibir el vuelo de un pájaro y no prestamos mucha atención a ese hecho, sin embargo, en cambio si queremos atravesar un río, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar la profundidad, la velocidad de la corriente y decidir si es conveniente o no atravesar el río, este último, generalmente lo hacemos inconscientemente.

En este contexto y en relación con lo que argumentamos, Zimmermann afirma que "*Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema, especialmente si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual*" (136). Por ejemplo, podemos proporcionar una gráfica a un estudiante y él podrá percibir algunos rasgos de lo que se presenta, pero, posiblemente no haya mayores trascendencias. Si queremos que el estudiante visualice una gráfica, esta tarea demanda una actividad mental más profunda como reconocer ciertos elementos del tema allí representados.

La influencia de las imágenes visuales en el pensamiento matemático, en el aprendizaje de la matemática y en su comprensión es una situación que ha despertado interés entre psicólogos y educadores matemáticos, es claro que una persona que ha dibujado por sí misma un diagrama para la formación de un concepto, recuerde dicho concepto más significativamente que cuando se les ha proporcionado el dibujo con el concepto. Por otro lado un estudiante que realiza el dibujo de un concepto lo aprende mejor que aquel que solo conoce la definición verbal. Una explicación admitida de este fenómeno es que ¨*la generación activa de una imagen visual por parte del que aprende facilita más el aprendizaje que la simple presencia de la imagen visual*¨ (Zimmermann 134). Es una hipótesis generalmente admitida que mejorando la educación visual en matemática, aumenta la intuición y se proporciona al estudiante una mayor capacidad de entendimiento.

La visualización es una habilidad a desarrollar en la enseñanza de la matemática. Es posible desarrollar habilidades visuales utilizando diferentes representaciones, en el que la herramienta tecnológica es un medio útil para explotarles de forma interactiva, diferentes tipos de representaciones gráficas, que le permitan al estudiante analizarlas como se comportan y así construir significados matemáticos.

1.6. El software matemático como herramienta para el mejoramiento del aprendizaje de la Geometría.

En los últimos años la enseñanza de la matemática, así como la forma de hacer matemática está cambiando. La Geometría está directamente vinculada en este proceso de transición en donde los ordenadores constituyen un estupendo laboratorio matemático que permite experimentar, suplir carencias, reforzar los conocimientos matemáticos, desarrollar la intuición, inferir, comprobar, demostrar, en concreto ver las situaciones matemáticas de una forma práctica. Por esta razón se han convertido en un valioso instrumento didáctico.

Según Balderas, "*la evolución que ha experimentado el software nos ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemática, brindando amplias posibilidades didácticas*" (9). De igual manera destacan "*la capacidad de esta herramienta para lograr la interacción del alumnado con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a construir conocimientos que le permitan tener una visión más amplia del contenido matemático*" (Guedez 43). De allí, el interés de investigar sobre la aplicación de estrategias donde se usa el software como herramienta para lograr, destrezas con criterio de desempeño que permitan mejorar sustancialmente el proceso de interaprendizaje de la Geometría.

"*Con los avances tecnológicos se han desarrollado muchos programas en los cuáles proporcionan medios para la enseñanza de la matemática; sin embargo el docente debe saber aprovecharlos para generar situaciones que permitan al alumnado construir un conocimiento más significativo*" (Ángel y Bautista 46). La idea es que el estudiante utilice la tecnología computacional como una herramienta de apoyo al proceso de interaprendizaje.

Para lograr comprender y entender mejor los conceptos matemáticos y reflejarlos en la solución de problemas, "*no pretende la instrucción del alumno sino, viabilizar la construcción del conocimiento, para que los estudiantes aprendan con ellas no de ellas*" (Jonassen, Carr y Ping 1). En tal sentido el software se usó con fines didácticos para facilitar estrategias de interaprendizaje relacionadas con el tema prácticas experimentales de Geometría.

"*El constructivismo abre posibilidades para promover estrategias que, incorporando tecnología informática, favorezcan la creación de nuevas formas de aprendizaje centrado en el alumno*" (Dede, 20). "Pues el empleo de las tecnologías, enriquecidas con experiencias significativas, pueden constituir herramientas cognitivas que el dicente utiliza para estimular y desarrollar habilidades del pensamiento" (Jonassen, Carr y Ping, 12). Así, según estos autores aprender con el computador supone el efecto de la tecnología en el que aprende y participa intelectualmente con dicha herramienta; la cual permite al estudiante organizar las ideas con mayor destreza para actuar posteriormente con ellas apoyando su proceso de aprender.

"*Las herramientas cognitivas son dispositivos usados para visualizar, organizar, automatizar o suplantar las técnicas del pensamiento*" (Jonassen, 11). Es decir, el software permite al estudiante entre otras cosas formar conceptos, graficar, realizar cálculos de manera rápida, aportar realismo a las aplicaciones, facilitar la experimentación numérica, según Esteban el propósito es que los estudiantes usen la tecnología para:

a) Representar el problema.
b) Promover sus conocimientos.
c) Consolidar esquemas preexistentes mediante la automatización de ejercicios de un nivel inferior.
d) Reagrupar la información pertinente y necesaria al resolver un problema (40)

Así en esta modalidad de herramienta cognitiva, la tecnología se hace cargo de las actividades rutinarias y que generan más trabajo[6]. Esto permite que el estudiante se centre en conceptos fundamentales y el docente brinde ayuda para evitar actividades que no aportan nada en forma directa a la labor educativa pero que hace falta realizar.

Por lo referido, el uso del computador como herramienta cognitiva, se centra en la calidad de la idea, ya que con esto se puede realizar manipulaciones,[7] permitiendo generar y organizar las ideas más fácilmente, apoyando el proceso de interaprendizaje. Es evidente que bajo esta perspectiva "*el profesor debe encarar un rol de generador de saberes y desarrollador de habilidades que permitan a los alumnos utilizar el análisis crítico y reflexivo*" (Cataldi 16).

El uso de tecnologías en la enseñanza de la matemática "*permite en el alumnado el desarrollo de habilidades del pensamiento como: explorar, inferir, hacer conjeturas, justificar, argumentar y de esta forma construir su propio conocimiento*" (Fernández, Izquierdo y Lima 29). Para estos autores, estas habilidades pueden ser desarrolladas integrando el trabajo intelectual con el software matemático. Además, dicha relación puede generar variadas " *experiencias y aplicaciones orientadas a producir, calcular, graficar, modelar, explorar, visualizar, clasificar, comparar, aplicar, simular o aplicaciones en que se integra la matemática a otras disciplinas*" (Osteiza y Silva 2). En tal sentido con el uso del software la atención se enfoca en facilitar que el estudiante aprenda a procesar la información de la materia, así como, en la transferencia y generalización de los aprendizajes a otros aspectos sean estos académicos o no.

Por otra parte, "*las herramientas informáticas permiten introducir una metodología de trabajo más constructivista en las clases de matemáticas, promoviendo una participación activa y creativa del alumno*" (Ángel y Bautista 45). El estudiante en complicidad con la tecnología construye su propio conocimiento y entendimiento

[6] Calcular, graficar
[7] Calcular, graficar, ordenar, trasladar

basándose en su experiencia e involucrándose activamente en el proceso de interaprendizaje.

Así mismo, dichos autores destacan que con el uso adecuado de estas herramientas el estudiante, asesorado por el profesor puede realizar actividades que le permitan explorar, experimentar y extraer conclusiones. "*Dichos procesos, aumenta en el alumno la toma de conciencia de la factibilidad de sus ideas, haciendo su aprendizaje más comprensivo que memorístico*" (Garza y Leventhal 8). Sin embargo esto no implica dejar a un lado la memoria sino usarla adecuadamente, impulsando al estudiante a pensar y explicar su razonamiento.

Las herramientas informáticas abarcan desde sistemas de simulación y modelado, hasta software matemático entre otros. "*Los beneficios que se obtengan del uso del software matemático en la labor docente, estarán en función de la capacidad que se tenga de su manejo y adecuación. Con el uso adecuado del software matemático el docente se convierte en un facilitador y diseñador de situaciones de aprendizaje para desarrollar en el alumno situaciones de autoaprendizaje*" (Meza y Cantarell 12). Su uso permite la interacción entre el maestro y el estudiante generando una relación activa enriquecedora para ambos, en la que el centro del proceso es el estudiante, el cual se hace responsable de la calidad de su aprendizaje.

Cabe recalcar que con el empleo del software matemático, el docente debe adaptar su metodología a esta herramienta e integrar los conocimientos teóricos con los prácticos, "*así como diseñar aplicaciones y problemas orientados al uso del software. Sin olvidar que diseñar este tipo de actividades requiere buen conocimiento del software; coherencia didáctica, respecto a lo que se le propone al alumno y ofrecer a este último una guía de cómo, cuándo y para que utilizar esta herramienta*" (Ángel y Bautista 17). Justamente en el desarrollo del tema de esta tesis se oferta el diseño de estrategias para el aprendizaje de la Geometría, estableciendo guías experimentales de laboratorio. En este sentido Queralt, Ángel y Bautista argumentaron que entre las posibilidades del software están:

a) Favorecer los procesos inductivos y la visualización de conceptos.
b) Permite comparar, verificar, conjeturar y refutar hipótesis.
c) Posibilita tener un laboratorio de cálculo.
d) Individualiza el proceso de enseñanza aprendizaje.
e) Sirve como elemento de motivación y como instrumento generador de problemas matemáticos.
f) Facilita la comprensión y aprendizaje de los contenidos programáticos (11).

Cabe destacar, que "*el uso de la tecnología no es la solución a todos los problemas educativos, pues el valor de usar computadoras estará en función de lo que diseñen los educadores, pero sobre todo lo que haga el alumno con ellas*" (Meza y Catarell 15). En tal sentido la tarea del docente es planificar, desarrollar y evaluar procesos de interaprendizaje, donde el software representa el papel de herramienta cognitiva. No obstante, se debe cuidar que el software no se constituya en el motivo de estudio, descuidando el aprendizaje de temas esenciales que se deben lograr con el uso de estos recursos.

"*El uso del software permite a los alumnos experimentar con los objetos matemáticos y sus propiedades, hacer conjeturas, y descubrir por si mismos resultados importantes*" (Ríos 10). Con esto se logra reforzar la comprensión y la creatividad, ayudando a eliminar el desproporcionado énfasis en aspectos calculistas, rescatando la idea de que el estudiante es el responsable de su aprendizaje. Bajo este enfoque," *el alumno y la tecnología actúan como socios, pues aquellos planifican, interpretan, deciden, descubren y el software calcula, grafica, almacena*" (Ríos 14), es decir efectúa actividades más rutinarias pues de lo que se trata es de que el estudiante aprenda con la tecnología, no de ella.

1.7. Software especializado

La enseñanza de la matemática ha adquirido nuevos horizontes a partir del desarrollo de las tecnologías y la posibilidad de que los estudiantes en las escuelas secundarias cuenten con su laptop personal. Para el caso particular del trabajo en Geometría existen numerosos programas de geometría dinámica y graficadores que plantean al docente formas inéditas de acercar el conocimiento al estudiante. Nos interesa, por tanto, construir una práctica docente a partir de los lineamientos actuales de la didáctica de la matemática enmarcada en el potencial que nos brinda el modelo constructivista.

La aplicación de simuladores[8] en la actividad de resolución de problemas, dentro de un laboratorio experimental, está dando muy buenos resultados, enriquece el aprendizaje de la matemática y en especial de la Geometría. "*Las actividades con el uso de un software educativo, permite que los alumnos sean dinámicos, exploren libremente, vayan descubriendo las propiedades de las figuras geométricas y logren verbalizarlas*" (Carrillo 19). La utilización de un software especializado en el aula permitirá un cambio de visión de una Geometría estática con papel y lápiz, a una Geometría dinámica que motiva a los estudiantes facilitándoles la búsqueda y el dominio del conocimiento.

Otra de las tecnologías seleccionadas para usar en las prácticas experimentales de geometría es la que nos presenta las calculadoras graficadoras y el software de conectividad[9] que nos permite entre otras cosas, determinar modelos matemáticos, modificar parámetros en figuras reales, haciendo que la práctica "*se convierta en un catalizador de la atención, cada estudiante recibe retroalimentación, lo que refuerza una idea o evidencia un error, permite que cada equipo de estudiantes comparta su producción con otros, promueve una auténtica comunidad de aprendizaje*" (Soriano 26). Con esta tecnología se estimula el aprendizaje, se desarrolla la habilidad de

[8]Considerada actividad manipulativa

[9] El modelo TI-Nspire CX, que presenta la Texas Instruments permite trabajar con imágenes digitales y hacer matemática sobre ellas. Además se establece una conectividad entre las calculadoras de los alumnos y la computadora del profesor por medio de un software.

ver lo que se está haciendo en 3D para criticarlo; evaluar lo que parece ser relevante, y revisar lo que parece no serlo, es un programa muy amigable tiene mucha similitud con Cabri y GeoGebra y a diferencia de estos se puede trabajar con volúmenes.

En la actualidad, enseñar Geometría es una tarea que puede verse enormemente enriquecida con el empleo de procesadores geométricos que logran darles dinamismo a las construcciones. De hecho, en estos casos se habla de geometría dinámica, que según Nick Jackiw y Steve Rasmusen, es un concepto que "*se aplica a los programas informáticos que permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observar como otros elementos responden dinámicamente al alterarse las condiciones previas*" (6). Esta estrategia de interaprendizaje aprovecha lo atractivo de las nuevas tecnologías para enseñar un sinfín de contenidos de Geometría, potencia la capacidad visual y constructiva del estudiante y facilita al docente la explicación de ciertos conceptos que requieren alguna explicación gráfica.

Si nos remontamos en el tiempo unos años atrás, recordaremos que nuestros estudiantes solo podían realizar construcciones gráficas de figuras geométricas y sus elementos utilizando papel y lápiz, con la limitación de que carecían de precisión y movimiento, con lo que se reducían las posibilidades de exploración. Por el contrario en la actualidad con la ayuda del software matemático, las construcciones con Geometría dinámica son precisas, permiten en forma sencilla y rápida, realizar figuras complejas, dotarlas de movimiento y si se requiere realizar modificaciones posteriores.

En el desarrollo de este trabajo hemos elegido, entre la variedad existente, el software GeoGebra para abordar algunas posibilidades de trabajo, sobre cálculo de áreas, perímetros, ángulos, volúmenes de figuras regulares.

El programa GeoGebra, además de servir como herramienta auxiliar en el proceso de interaprendizaje de la matemática, es un software de Geometría dinámica, que combina elementos de Geometría, álgebra, cálculo matemático y estadística. El programa es libre y gratuito. Otra ventaja es que funciona en varios sistemas operativos[10] y que fue elaborado con una visión cooperativa, por lo cual es posible acceder a espacios de ayuda, recursos, foros y wikis que usuarios de todo el mundo mantienen en constante renovación mediante applets[11], por lo que podemos crear páginas dinámicas en pocos segundos; en definitiva es una plataforma que se abre a la educación para interactuar dinámicamente con la matemática.

El GeoGebra es una herramienta de trabajo que puede ser de utilidad tanto para el docente como para el estudiante. Para el docente, porque le permite elaborar material didáctico, estático o dinámico; como imágenes, presentaciones,

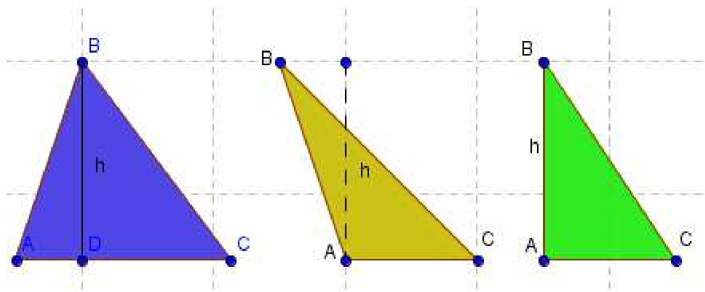
[10] Windows, MacOS X, Linux o Solaris

[11] Es una construcción que se realiza utilizando el software matemático GeoGebra, que se puede insertar en una página web y permite que el usuario interactúe dinámicamente con él.

demostraciones, applets publicados en una página web o blog. Por otra parte al estudiante le brinda la posibilidad de visualizar conceptos matemáticos, realizar construcciones libres o dirigidas a fin de resolver problemas, explorar e investigar hipótesis, etc.

Según Herminia Azinian en su libro Tecnologías de la Información y la Comunicación: plantea que el software matemático presenta ciertas aplicaciones que están relacionadas con:

-La interactividad e inmediatez: que es la posibilidad de producir modificaciones, dar respuestas y requerir acciones con rapidez y fluidez. Por ejemplo con una misma construcción es posible visualizar varias situaciones, como construir las alturas de un triángulo acutángulo y luego transformar el ángulo de modo que sea obtusángulo o rectángulo para ver qué ocurre con las alturas en estos.



Fuente: Gráfico construido en geogebra.
Elaborado por: El autor

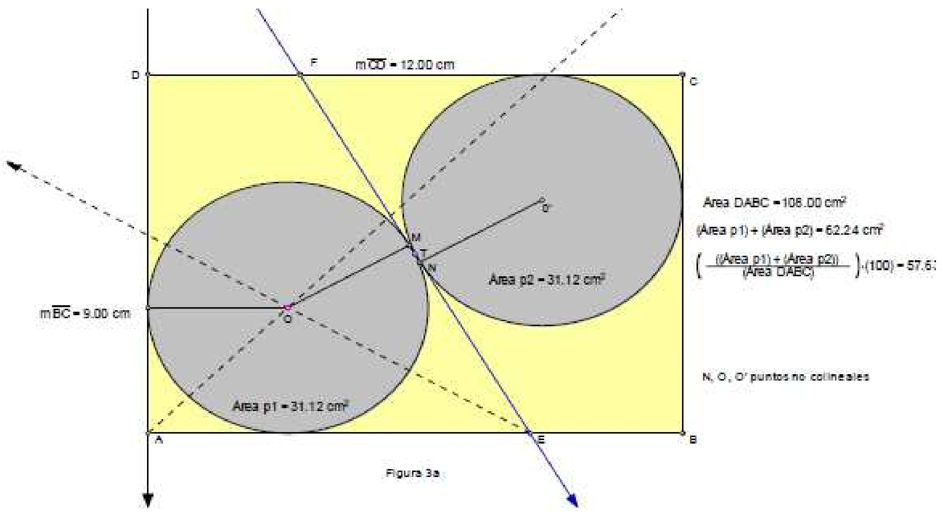
-Capacidad de almacenamiento y de recuperación de la información: posibilita el almacenamiento para su posterior revisión de la traza del trabajo de los estudiantes, de la ruta que han seguido, así el estudiante puede revisar su estrategia de construcción.

-Múltiples formas de representar en un mismo medio: textual, gráfica, tabular, auditiva, icónica, espacial; llegando a realizar exploraciones gráficas.

-Polivalencia, versatilidad: El mismo medio puede usarse de diversas maneras, ampliando enfoques. El estudiante puede construir figuras a partir de conocimientos previos, o sin usar conocimientos previos y adquirir nuevos aprendizajes a partir de lo que visualiza en la construcción y apoyarse en ella para demostrar esos nuevos aprendizajes. (23). Las características citadas, además de permitir la construcción del conocimiento en ambientes de aprendizajes óptimos, pueden ayudar al docente, abriéndole ventanas al proceso de enseñanza de los estudiantes, permitiendo que estos, manipulen, exploren, interpreten, organicen, expresen y comuniquen sus ideas liberándose de la memorización y rutinas innecesarias y exteriorizando sus procesos cognitivos.

En los párrafos anteriores hemos realizado una descripción rápida del programa GeoGebra. No se ha explicado por motivos de espacio y porque no es el tema de este trabajo como se utiliza, sin embargo mencionemos que las interfaces son intuitivos y existen en los propios sitios manuales, ejemplos, tutorías, applets que nos pueden ayudar a recorrer las diferentes aplicaciones que nos brinda esta herramienta didáctica.

Para incorporar el GeoGebra a las clases de Geometría, aquellos docentes que no se encuentran muy familiarizados con el programa, pueden comenzar utilizando applets creados por otros profesores, los cuales se encuentran muy fácilmente en distintos sitios de internet. Otra forma de incorporar el programa al aula, es creando materiales didácticos estáticos que representen situaciones problemáticas, como por ejemplo, problemas representados por gráficos con los datos incluidos en la imagen, en donde el estudiante visualice rápidamente que es lo que tiene que encontrar y proponga diferentes alternativas de solución. Estos materiales en lo posterior pueden ser incluidos en trabajos prácticos o evaluaciones.



Fuente: Gráfico construido en geogebra
Elaborado por: El Autor

Una vez que se familiaricen con el programa, podrán crear sus propios applets, obviamente estas no son las únicas opciones, pues la creatividad de los docentes permitirá generar nuevas y mejores propuestas.

En este marco, se concluye que es una verdad innegable la importancia que tiene al transcurrir del tiempo el uso inteligente de los recursos informáticos, pues permiten ampliar las experiencias de aprendizaje. Pero no basta con emplear tecnología, "*es necesario la capacitación de los docentes para afrontar estas situaciones y un proceso de aprendizaje de la comunidad toda para aceptar las diferencias*" (Dede 3). En tal sentido, se deben aprovechar estos recursos para innovar el currículo, la enseñanza y aprendizaje. Sin olvidar que toda filosofía de trabajo requiere de tiempo y espacio tanto para comprenderla, adquirirla, desarrollarla y valorarla.

CAPITULO II

Prácticas experimentales de laboratorio y Geometría: el caso del Colegio Rafael Borja.

2.1. Situación actual

En años anteriores, en el ciclo básico, hoy octavo, noveno y décimo de Educación General Básica, la carencia de conocimientos de Geometría era evidente, su estudio no era trascendental; situación similar sucede en la actualidad, en donde de acuerdo a la distribución de la malla curricular que presentan varios docentes, damos prioridad el momento de planificar a los bloques de Álgebra, Trigonometría y Estadística, dejando el módulo de Geometría para analizar en el último mes del año lectivo, que por lo general es muy corto, corriendo el riesgo de que el docente por falta de tiempo aborde los contenidos de una manera apresurada, los analice a medias o no los estudie, provocando vacíos que en lo posterior repercutirán en el aprendizaje de los estudiantes dando como resultado una educación en Geometría carente de conocimientos sólidos, sin objetivos concretos, sin una planificación coherente, lo que incide directamente en la falta de interés de los estudiantes por aprender Geometría. Por ello, nos vemos en la necesidad de introducir nuevas estrategias de aprendizaje para lograr destrezas con criterio de desempeño, y una alternativa que nos permitirá aquello, es la aplicación de las prácticas experimentales de laboratorio.

En el colegio Rafael Borja, los estudiantes de Décimo Año de Educación General Básica, no se involucran en la adquisición de conocimientos de Geometría por hallarles poco significado, debido a la escasa aplicación que se realiza de estos conceptos, en otras ramas de la matemática, lo que promueve la falta de interés y la carencia de conocimientos que tienen de la asignatura; situación que en gran parte se debe a los docentes que en años anteriores no le dimos la importancia que esta tiene en el campo de la matemática con sus diferentes aplicaciones. En el año lectivo 2011-2012, un 70% de los estudiantes que cursan cuarto año de Bachillerato General Unificado en el establecimiento, no llegan con un manejo adecuado de los elementos básicos del Álgebra Elemental y tienen deficiencias en el nivel de conocimientos de Geometría que acarrean de los años anteriores, no transforman unidades, no saben despejar fórmulas de área ni volumen de figuras regulares elementales.

En el ejercicio de la docencia se ha podido comprobar que uno de los principales problemas, no solo en Décimo Año de Básica, sino en el Bachillerato en general, es la falta de razonamiento lógico; los estudiantes no pueden interpretar los enunciados y no es por falta de capacidad, es porque los aprendieron de memoria, haciendo ejercicios repetitivos en donde la incógnita, el planteo, la resolución, la posición de la figura y las letras eran las mismas, dando como resultado un nivel pobre de desarrollo del pensamiento.

Aparte de estos problemas hay que adjuntar la carencia en la institución de un laboratorio experimental de matemática, que este equipado con material concreto y software educativo, recursos didácticos que apoyan el aprendizaje de la Geometría, la falta de estos, no permite desarrollar una enseñanza eficaz acorde a las exigencias y estándares de calidad que nos plantea el nuevo sistema educativo. En la actualidad, al no estar disponibles estos recursos en la Institución, el 100% de los profesores de la asignatura de matemática[12], continuamos utilizando el método conductista, excluyendo de nuestra práctica docente estas estrategias de aprendizaje, lo que provoca que el estudiante no aprenda explorando, descubriendo, analizando, y por lo tanto no consiga un equilibrio entre el cocimiento teórico y la práctica.

La aplicación del software matemático en las prácticas experimentales de laboratorio de Geometría, dentro de la institución, tendría que sortear serios problemas, pues según los resultados obtenidos en una encuesta aplicada al área de matemática en el año 2012, el 20% de los docentes no maneja la computadora y el 80% que si lo puede hacer, desconoce de las bondades de esta herramienta[13] para usarla en el aula. Lo que no permitiría implementar una nueva visión de la enseñanza aprendizaje de la Geometría.

Al dividir una figura irregular en figuras regulares conocidas para calcular el área y volumen total, la gráfica es fundamental para su resolución, por lo tanto, el poder modelar diferentes figuras geométricas, cortarlas, cambiarlas de posición, visualizarlas en dos y tres dimensiones, con datos reales, hace que el estudiante recupere el interés y desarrolle la habilidad de análisis.

Ante esta realidad, si no se dispone de un laboratorio en la Institución, el proceso enseñanza aprendizaje se limita, se complica el logro de las estrategias con criterio de desempeño propuestas en el bloque de Geometría por el docente. Sería difícil que el estudiante realice visualizaciones, descripciones, análisis e incluso resolver problemas sencillos sobre los que ha aprendido a través de su experiencia, no dispondría de una nueva visión del tema con un nuevo lenguaje, nuevos objetos, propiedades y relaciones.

Por otro lado, hay que considerar también que solo con equipamiento e infraestructura no alcanza para incorporar las nuevas tecnologías en el aula, ni para generar aprendizajes más relevantes en los estudiantes. Por ello, los profesores son piezas clave en el proceso de incorporación del recurso tecnológico al trabajo pedagógico del Colegio. En consecuencia, la incorporación del software

[12] Este porcentaje se determinó por medio de la observación de la práctica docente a los profesores de la Institución.
[13] Software matemático

matemático, como parte de un proceso de innovación pedagógica, requiere entre otras instancias la formación continua del docente lo que permitirá asistir y sostener el desafío que esta tarea representa.

Utilizar prácticas de laboratorio experimental con software matemático y material concreto en Geometría se vuelve indispensable; nos permite motivar, concienciar, involucrar y compartir con los estudiantes el proceso de aprendizaje, de tal manera que podamos verificar el avance que se va obteniendo, convirtiéndose en una alternativa importante para lograr destrezas con criterio de desempeño.

2.2. Las prácticas experimentales de laboratorio y el Aprendizaje de la Geometría: Breve Diagnóstico.

2.2.1. Descripción del Problema

No podemos ser indiferentes a la forma como se ha llevado el aprendizaje de la matemática a través de los años, siempre ha presentado deficiencias, motivados principalmente por el excesivo número de alumnos por aula, o porque el docente continua utilizando una metodología tradicional, pasiva, conductista, y es reacio a realizar una planificación curricular que se apoye en algún modelo pedagógico acorde a las exigencias del medio; si a esto le agregamos la falta del uso de estrategias didácticas y actualización pedagógica, tenemos como resultado un aprendizaje de mala calidad.

Las Autoridades del Colegio Rafael Borja, conscientes del deficiente aprendizaje de la matemática que se viene impartiendo en la Institución nombraron en el año 2003 una comisión del área de Matemática para que indague sobre las causas de las malas evaluaciones y las posibles soluciones. Se detectó que el problema se debía a la falta de motivación, malos hábitos de estudio, falta de atención, enseñanza pasiva, indisciplina entre otros. Las medidas administrativas y correctivas que se tomaron no fueron suficientes, los estudiantes incluso en la actualidad continúan accediendo en reducido número a las facultades técnicas de Ingeniería civil, Eléctrica, Informática y Arquitectura en universidades públicas[14].

A partir del año 2004 se han venido impartiendo en la Institución esporádicamente cursos de mejoramiento docente a los miembros del área con el propósito de aportar al mejoramiento del proceso pedagógico, pero los resultados no han sido los esperados. En la actualidad con la nueva malla curricular y sistema de evaluación el problema persiste y se ha agudizado; por ello, la realización del presente trabajo de investigación.

[14] De acuerdo a datos obtenidos del DOBE del Colegio Rafael Borja.

2.2.2. Formulación del problema

¿Cómo incide la implementación y aplicación de prácticas experimentales de laboratorio, como propuesta metodológica, en el aprendizaje de la Geometría plana de figuras regulares en los estudiantes de Décimo Año de Educación General Básica del colegio Rafael Borja?

2.3. Metodología empleada en el estudio

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación se utilizó como procedimiento metodológico: el estudio de la teoría, el diagnóstico de la situación y planteo de una propuesta para estructurar guías didácticas, y a partir de los datos obtenidos, inferir conclusiones sobre la influencias de las prácticas experimentales de laboratorio en el aprendizaje de la geometría.

2.3.1. Modalidad de investigación: De campo

2.3.2. Nivel de investigación: Descriptiva exploratoria

El tipo de investigación es descriptiva-exploratoria y una modalidad de investigación de campo; porque se buscó información tanto en los alumnos del décimo año de Educación General Básica como en los profesores del Área de Matemáticas del Colegio Rafael Borja, principalmente en lo que se refiere al uso de estrategias de interaprendizaje.

2.3.3. Población y muestra

El trabajo se realiza en los años lectivos 2011-2012 y 2012-2013 en el Décimo Año de Educación General Básica en el Colegio Rafael Borja, en el bloque de Geometría.

2.3.4. Técnicas e instrumentos de investigación

- Observación directa mediante fichas de observación.
- Trabajo grupal e individual.
- Encuesta, utilizando un formato de cuestionario realizado a los estudiantes.
- Análisis de contenidos, que para todos va a ser la actualización curricular.
- Análisis documental, vamos a utilizar como fuente de datos, bibliografía especializada, informes de prácticas, separatas, páginas de internet, recopilación documental, filmaciones, fotografías del desarrollo de la práctica, testimonios de los estudiantes, notas de campo, diario del investigador.

2.3.5. Plan de procesamiento de información

Clasificación, fichas de registro, tabulación mediante Excel, codificación.
Para la prueba de hipótesis, hemos trabajado con dos grupos uno de control y otro experimental, aplicando un pretest y postest con muestras apareadas.

La propuesta se desarrolló durante el tercer trimestre del año lectivo 2011-2012 y en el primer semestre del año 2012- 2013 en el Colegio Rafael Borja con el Décimo Año de Educación General Básica, en el bloque de Geometría.

2.3.6. Tipo de investigación

Examinando lo que se ha investigado anteriormente, se encontró suficiente evidencia en la bibliografía revisada de que el software matemático integrado al trabajo intelectual del estudiante, sirve de gran ayuda en el aprendizaje de la matemática. Sin embargo en las experiencias registradas no se encontraron cual fue el tipo de investigación utilizada, no se evidencio si la investigación era cuantitativa o cualitativa. Además la revisión de la literatura reflejo una falta sustancial de experiencias en el área de la matemática que luego de ser analizadas y sistematizadas podrían incorporarse en la práctica docente.

En virtud de aquello se determinó realizar un estudio donde se recogieran datos cualitativos y cuantitativos. El enfoque cuantitativo que proponemos, plantea un estudio delimitado y concreto, sometiendo a la hipótesis a prueba mediante el empleo de un diseño de investigación apropiada, en donde los resultados corroboraron la hipótesis. Para obtener tales resultados se recolectó datos numéricos de los participantes, los mismos que posteriormente se estudiaron y se analizaron mediante procesos estadísticos.

En el enfoque cualitativo de investigación se utilizaron encuestas aplicadas a los estudiantes para determinar el nivel de incidencia, aceptación o rechazo que se consiguió con la aplicación de software y material concreto en las practicas experimentales, también se realizaron discusiones en grupo, evaluación de experiencias, puestas en común, perspectivas y puntos de vista de los participantes luego de cada práctica.

Considerando que un experimento es una situación de control que se lleva a cabo para analizar si una variable independiente afecta a una variable dependiente. Para ello se manipuló de manera intencional la variable independiente[15] (causa) para posteriormente analizar las consecuencias de tal manipulación sobre la variable dependiente[16] (efecto). La variable dependiente no se manipuló sino que se midió para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tuvo en ella.

[15] Laboratorio experimental de geometría provisto de software y material concreto.
[16] Aprendizaje de geometría.

En la tesis se aplicó un nivel mínimo de manipulación que es de dos grados en la que se utilizó, presencia- ausencia de la variable independiente, en donde un grupo se expuso a la presencia de la variable independiente y el otro no. Posteriormente los dos grupos se comparan para ver si el grupo expuesto a la variable independiente difiere del grupo que no fue expuesto[17]. Ahora bien, el hecho de que uno de los grupos no se expuso al tratamiento experimental, no significó que su participación en el experimento fue pasiva. Por el contrario, se realizó las mismas actividades que el grupo experimental, excepto someterse al estímulo.

En el diseño cuasi experimental como el que establecimos nuestro estudio; los grupos de estudiantes seleccionados para la realización del experimento, estaban informados con anterioridad a la realización del experimento y cada uno de ellos constituyo un grupo experimental. La forma como se seleccionaron los grupos fue independiente del experimento.

Por otra parte con el propósito de determinar el resultado del aprendizaje de la Geometría utilizando prácticas experimentales de laboratorio provisto de software y material concreto, valorado por el rendimiento académico se seleccionó un diseño de dos grupos con pretest y postest.
Sobre la base de lo expuesto, se optó por seleccionar un diseño cuasi-experimental, incluyendo en el proceso como mencionamos anteriormente la recolección de datos cualitativos y cuantitativos. Los datos cualitativos se transformaron numéricamente, debiendo efectuar en ellos, el proceso de agruparlos, jerarquizarlos, codificarlos, tabularlos y finalmente trasladarlos a cuadros. Además en este tipo de investigación cuasi-experimental, se asumió que los individuos que participaron en ella conservaron ciertas diferencias a pesar de recibir el mismo tratamiento de la variable independiente.

2.3.7. Variables de la investigación

Las variables por considerar fueron:

Las Prácticas experimentales de laboratorio basado en el software y material concreto (variable independiente) y el aprendizaje de la Geometría (variable dependiente).

2.3.8. Participantes

El estudio se realizó con dos paralelos de 42 y 43 estudiantes cada uno pertenecientes a los paralelos “A” y “B” del Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja. La selección de los paralelos no se la realizó aleatoriamente, las personas participantes poseían un alto grado de interés por el aprendizaje de la Geometría, respondieron satisfactoriamente al estímulo de mejorar el aprovechamiento por participar en la experiencia, poseían edades entre 14 y 15 años del sexo masculino y del mismo nivel socioeconómico medio- alto. No

[17] El grupo no expuesto, llamado también grupo de control, nos sirve como patrón de comparación.

tenían experiencia en el uso del material concreto ni del software matemático GeoGebra, además la metodología incorporada a las prácticas de laboratorio, en la que fueron expuestos estos participantes por lo general fue muy expositiva tendiendo al constructivismo. Lo que nos permitió, realizar ciertas comparaciones entre la nueva metodología empleada y la modalidad tradicional, logrando que los estudiantes participantes establezcan sus propias conclusiones sobre si el uso de esta herramienta informática sirvió de apoyo para mejorar habilidades de aprendizaje y su aprendizaje en Geometría.

2.3.9. Procedimiento

1) Se realizaron prácticas con el grupo seleccionado, referidos a la utilización del software GeoGebra, sus usos y aplicaciones en lo que respecta al cálculo de áreas, perímetros y volúmenes de figuras regulares. Esto con el objeto de ofrecer al estudiante una guía de cómo, cuándo y para qué usar esta herramienta.

2) Se aplicó una prueba exploratoria al grupo, con lo que se determinó el nivel de conocimientos de los estudiantes en relación con el tema de cálculo de áreas, volúmenes y perímetros de figuras regulares. Esto fue aplicado al inicio como al final del experimento, tanto al grupo de intervención como al grupo de control.

3) Se aplicó el tratamiento, el cual forma parte de las actividades de clase. Este consistió en el empleo de prácticas experimentales de laboratorio provisto de una metodología, que incorporó situaciones de aprendizaje creado de manera intencional, donde se usó el material concreto y el software como herramientas cognitivas. Dichas actividades estuvieron relacionadas por un lado, con la elaboración y entrega de informes de laboratorio en donde utilizaron tanto el software como el material concreto de apoyo para demostrar y representar lo que aprendieron en cada práctica, en grupos de dos integrantes y por otro lado, se efectuaron evaluaciones sumativas, las mismas que se llevaron a cabo mediante dos pruebas escritas de manera individual, siendo sus objetivos evaluar los conocimientos de los temas tratados.

Para verificar la hipótesis nula o alternativa, se utilizaron las calificaciones obtenidas por los estudiantes en las pruebas y los informes. Los mismos establecieron el rendimiento y se calculó la media y la desviación estándar. Además se aplicó la prueba “t” de Student a toda la población con el objeto de comparar los resultados de la prueba exploratoria aplicada al inicio y al final del experimento, al grupo de intervención.

Para enriquecer la evaluación sumativa se realizó una evaluación formativa a través de dos encuestas, para obtener información complementaria sobre el grado de satisfacción que los estudiantes tienen sobre el uso del software y material concreto como herramientas didácticas en el desarrollo de las prácticas de geometría. Estas encuestas se realizaron después de que los estudiantes conocieron las notas de la unidad.

2.3.10. Instrumentos

1) Prueba exploratoria de conocimientos: consistió en una prueba escrita sobre 20 puntos de carácter formativo para las actividades académicas; su objetivo fue determinar los conocimientos que los estudiantes tenían sobre geometría elemental, antes de aplicar el tratamiento, esta prueba de diagnóstico se la aplico tanto al grupo de intervención como al grupo de control.

2) Una prueba exploratoria escrita sobre 20 puntos al final del experimento que evaluó los logros de los estudiantes en relación con el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas regulares, se aplicó tanto al grupo de intervención como al grupo de control y con estos resultados determinar el efecto del tratamiento antes y después del experimento.

3) Encuesta: este instrumento estuvo estructurado en dos partes, una encuesta con alternativas de respuestas dicotómicas (Si y No) y otra con alternativas de nunca, pocas veces, casi siempre y siempre, siendo elaborado en función de los indicadores de la variable aprendizaje de la geometría.

4) Informes grupales. Para verificar el nivel de aprendizaje obtenido y la utilización del software y material concreto.

2.4 Análisis y discusión de resultados

2.4.1 Hipótesis de investigación

La implementación y aplicación de las prácticas de laboratorio experimental como propuesta metodológica, influyen positivamente en el aprendizaje de la geometría plana de figuras regulares.

Para detectar mejoras en el aprendizaje de la geometría plana de figuras regulares en el estudiantado, se consideró el rendimiento académico, así como las prueba exploratorias que se aplicaron tanto a los estudiantes del grupo de control como a los del grupo de intervención, una antes de la aplicación del experimento y otra al final. Para el contraste de la hipótesis se aplicó la prueba "t" de Student para datos relacionados con las calificaciones obtenidas en las pruebas exploratorias antes y al final del experimento, específicamente a la población del grupo de intervención con un intervalo de confianza del 95% que corresponde a un nivel de significancia de un $\alpha = 0.05$. No obstante, la media obtenida en la prueba exploratoria de diagnóstico, en donde se verificó el nivel de conocimientos sobre geometría, arrojó para el grupo de control un promedio de 10,34 sobre 20 con una desviación estándar de 2,42 y para el grupo de intervención un promedio de 10,64 sobre 20 con una desviación estándar de 2,46 que se puede verificar en las tablas 1 y 2.

Tabla 1. Prueba de Diagnóstico (Décimo Año“ B”)

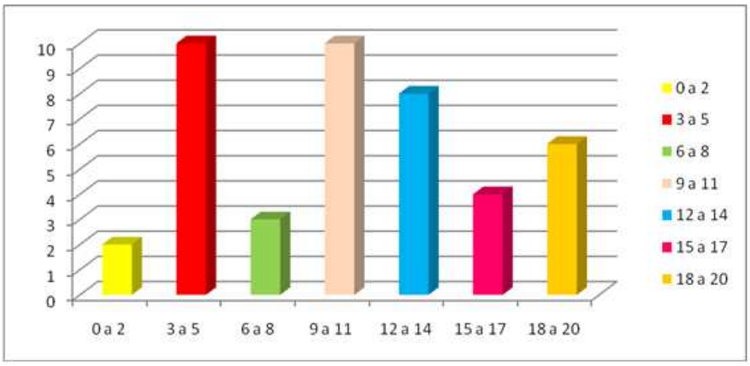
2	15	14	18	3	4	18	12
6	12	9	11	20	18	13	
15	6	3	12	5	4	15	
3	9	11	10	4	12	10	
12	15	9	10	5	9	5	
20	20	6	5	14	10	1	

Fuente: Prueba de diagnóstico, tomada a los alumnos del décimo año B
Elaborado por: El autor

Lim.Inferior	Lim.Superior	Frecuencia Absoluta F	Frecuencia Relativa % Fr	Marca de Clase Xi	F.Xi	$(Xi-\dot{X})$	$(Xi-\dot{X})^2$
0	2	2	4,65%	1	2,00	-9,34884	87,40076
3	5	10	23,26%	4	40,00	-6,34884	40,30773
6	8	3	6,98%	7	21,00	-3,34884	11,21471
9	11	10	23,26%	10	100,00	-0,34884	0,12169
12	14	8	18,60%	13	104,00	2,65116	7,02866
15	17	4	9,30%	16	64,00	5,65116	31,93564
18	20	6	13,95%	19	114,00	8,65116	74,84262
TOTAL		**43**	**100%**		**445**		**252,85181**

Fuente: Tabla 1.
Elaborado por: El autor

$$\dot{X} = \frac{\sum(F*Xi)}{N} = \frac{445}{43} = 10,3488 \qquad S = \sqrt{\frac{(Xi-\dot{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{252,8518}{43}} = 2,4249$$



Fuente: Tratamiento de datos de la tabla 1
Elaborado por: El autor

Tabla 2. Prueba de Diagnóstico (Décimo Año "A")

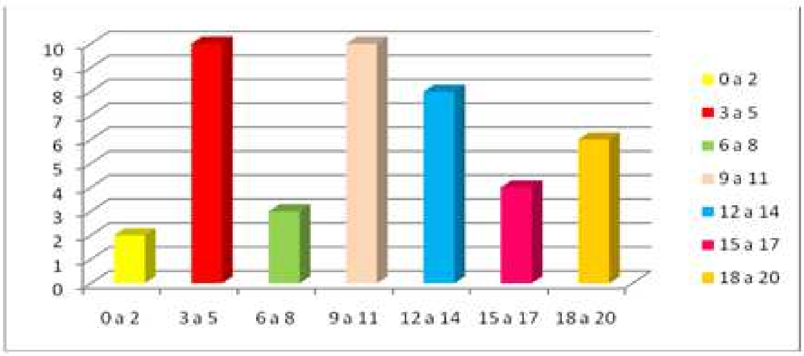
1	18	20	4	17	18	19
6	1	12	18	15	2	10
10	18	19	8	13	2	15
11	14	13	6	4	7	15
18	2	15	13	8	3	16
6	10	2	18	3	7	4

Fuente: Prueba de diagnóstico, tomada a los alumnos del décimo año A
Elaborado por: El autor

Lim.Inferior	Lim.Superior	Frecuencia Absoluta F	Frecuencia Relativa % Fr	Marca de Clase Xi	F.Xi	(Xi-Ẋ)	(Xi-Ẋ)²
0	2	6	14,29%	1	6,00	-9,64286	92,98469
3	5	5	11,90%	4	20,00	-6,64286	44,12755
6	8	7	16,67%	7	49,00	-3,64286	13,27041
9	11	4	9,52%	10	40,00	-0,64286	0,41327
12	14	5	11,90%	13	65,00	2,35714	5,55612
15	17	6	14,29%	16	96,00	5,35714	28,69898
18	20	9	21,43%	19	171,00	8,35714	69,84184
TOTAL		42	100%		447		254,89286

Fuente: Tabla 2
Elaborado por: El autor

$$X = \frac{\sum(F*Xi)}{N} = \frac{447}{42} = 10,6428 \qquad S = \sqrt{\frac{(\mathrm{Xi}-\dot{\mathrm{X}})^2}{N}} = \sqrt{\frac{254,89286}{42}} = 2,4635$$



Fuente: Tratamiento de datos de la tabla 2
Elaborado por: El autor

Interpretación: Antes de aplicar el experimento y de acuerdo a los promedios obtenidos en la prueba de diagnóstico, se detectó que tanto los estudiantes del grupo de intervención como los del grupo de control, carecían de conocimientos básicos de geometría, no sabían lo que es una bisectriz, una diagonal, una perpendicular, la fórmula del área de un triángulo, de un trapecio, por citar algunos. Ante esta realidad, surgió como una alternativa didáctica para mejorar el proceso pedagógico la aplicación de prácticas experimentales de laboratorio de geometría provista de software y material concreto.

Los datos obtenidos (Tabla 1 y Tabla 2) de la media y de la desviación estándar en la prueba exploratoria antes de la aplicación del tratamiento, tanto para el grupo de intervención como para el grupo de control no establecieron diferencias significativas, siendo los niveles de conocimientos bajos, casi nulos, lo que permitió detectar que en los cursos anteriores al Décimo Año de Educación General Básica, el proceso pedagógico no estuvo acorde a las exigencias que el nuevo currículo nos plantea para el estudio de la Geometría.

Tabla 3. Prueba exploratoria final (Décimo Año "A")

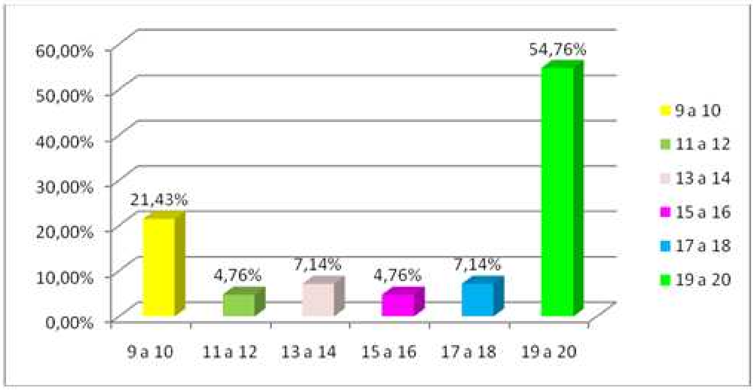
20	11	20	20	10	20	11	10	10
20	10	9	20	19	18	9	19	17
20	14	20	13	10	17	10	20	20
20	20	20	20	20	15	20	9	20
20	20	19	15	13	10			

Fuente: Prueba exploratoria final, tomada a los alumnos del décimo año A
Elaborado por: El autor

Lim.Inferior	Lim.Superior	Frecuencia Absoluta F	Frecuencia Relativa % Fr	Marca de Clase Xi	F.Xi	(Xi-Ẋ)	(Xi-Ẋ)²
9	10	9	21,43%	9,5	85,50	-6,7143	45,0816
11	12	2	4,76%	11,5	23,00	-4,7143	22,2245
13	14	3	7,14%	13,5	40,50	-2,7143	7,3673
15	16	2	4,76%	15,5	31,00	-0,7143	0,5102
17	18	3	7,14%	17,5	52,50	1,2857	1,6531
19	20	23	54,76%	19,5	448,50	3,2857	10,7959
TOTAL		42	100%		681		87,6327

Fuente: Tabla 3
Elaborado por: El autor

$$\dot{X} = \frac{\sum(F*Xi)}{N} = \frac{681}{42} = 16{,}2 \qquad S = \sqrt{\frac{(Xi-\dot{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{87{,}6327}{42}} = 1{,}4445$$



Fuente: Tratamiento de datos de la tabla 3
Elaborado por: El autor

Tabla.4. Prueba Exploratoria Final (Décimo Año " B")

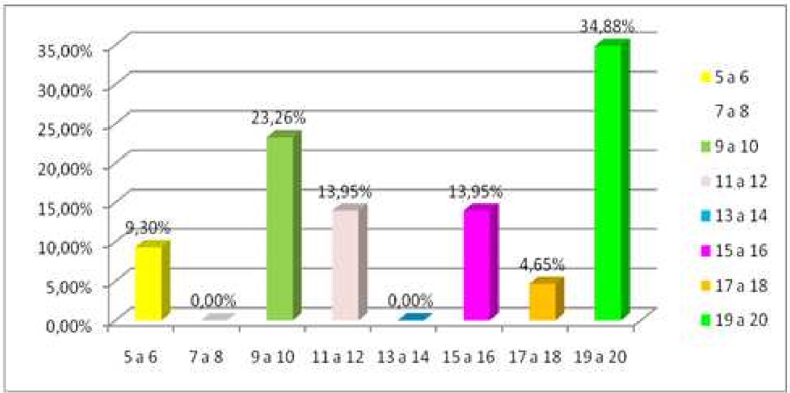
16	19	20	11	15	10	20	5
5	5	20	5	10	11	20	15
20	12	10	12	15	12	20	10
18	15	20	10	20	20	20	20
12	20	17	20	20	9	15	9
10	10	10					

Fuente: Prueba exploratoria final, tomada a los alumnos del décimo año B
Elaborado por: El autor

Lim.Inferior	Lim.Superior	Frecuencia Absoluta F	Frecuencia Relativa % Fr	Marca de Clase Xi	F.Xi	(Xi-Ẋ)	(Xi-Ẋ)²
5	6	4	9,30%	5,5	22,00	-8,60465	74,0400
7	8	0	0,00%	7,5	0,00	-6,60465	43,6214
9	10	10	23,26%	9,5	95,00	-4,60465	21,2028
11	12	6	13,95%	11,5	69,00	-2,60465	6,7842
13	14	0	0,00%	13,5	0,00	-0,60465	0,3656
15	16	6	13,95%	15,5	93,00	1,39535	1,9470
17	18	2	4,65%	17,5	35,00	3,39535	11,5283
19	20	15	34,88%	19,5	292,50	5,39535	29,1097
TOTAL		43	100%		606,5		188,5992

Fuente: Tabla 4
Elaborado por: El autor

$$\dot{X} = \frac{\sum(F*Xi)}{N} = \frac{606,5}{43} = 14,1047 \qquad S= \sqrt{\frac{(Xi-\dot{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{188,5992}{43}} = 2,0943$$



Fuente: Tratamiento de datos de la tabla 4
Elaborado por: El autor

Interpretación: El promedio obtenido tanto por el grupo de intervención después de la aplicación del experimento (16,21) como por el grupo de control que continuó con las clases utilizando el método tradicional (14,10) lo que se puede verificar en las tablas 3 y 4 respectivamente, se reporta diferencias significativas, pues los dos grupos mejoraron su promedio, siendo el más óptimo el del grupo de intervención que utilizó el software y el material concreto como herramientas didácticas en el aula.

Además, en el grupo de intervención aplicamos la prueba "t" de Student para datos relacionados, en esta prueba estadística se exige dependencia entre los dos momentos, uno antes del experimento y otro después. Con ello se da a entender que en el primer período, las calificaciones servían de control, para conocer los cambios que se susciten después de aplicar las prácticas de laboratorio de geometría provista de software y material concreto como variable experimental.

2.4.2. Hipótesis de la investigación

Consideramos como hipótesis (Ha). La implementación y aplicación de las prácticas de laboratorio experimental como propuesta metodológica, influyen positivamente en el aprendizaje de la Geometría Plana de figuras regulares en los estudiantes de décimo año de educación básica del Colegio Rafael Borja. Ha: $x_1 < x_2$ y como hipótesis nula (Ho). La implementación y aplicación de las prácticas de laboratorio experimental como propuesta metodológica, no influyen positivamente en el aprendizaje de la geometría plana de figuras regulares en los estudiantes de Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja. Ho: $x_1 \geq x_2$ .Para el contraste de la hipótesis se planteó la prueba t de Student con muestras relacionadas, con las calificaciones obtenidas en las pruebas exploratorias específicamente con el grupo de intervención (tabla 5) y con el tratamiento de datos realizados confirmará o rechazará Ho.

Para el tratamiento de datos de nuestra investigación vamos a utilizar la distribución t de Student con un nivel de significancia del 5% que consideramos el más recomendable, dada la naturaleza de los datos utilizados, con un valor critico tt y con n-1 grados de libertad, posteriormente con los resultados obtenidos se definirá que decisión tomar, la misma que estará en concordancia con la gráfica.

Tabla 5. Tratamiento de los datos antes-después del grupo de intervención.

No Alumno.	ANTES	DESPUÉS	d	(d-dpro)	(d-dpro)²
1	1	19	18	13,19	173,99
2	18	16	-2	-6,81	46,37
3	20	20	0	-4,81	23,13
4	4	20	16	11,19	125,23
5	17	15	-2	-6,81	46,37
6	18	13	-5	-9,81	96,23
7	19	20	1	-3,81	14,51
8	6	13	7	2,19	4,80
9	1	16	15	10,19	103,85
10	12	16	4	-0,81	0,66
11	18	11	-7	-11,81	139,46
12	15	18	3	-1,81	3,27
13	2	16	14	9,19	84,46
14	10	20	10	5,19	26,94
15	10	9	-1	-5,81	33,75
16	18	20	2	-2,81	7,89
17	19	9	-10	-14,81	219,32
18	8	20	12	7,19	51,70
19	13	9	-4	-8,81	77,61
20	2	20	18	13,19	173,99
21	15	20	5	0,19	0,04
22	11	13	2	-2,81	7,89
23	14	20	6	1,19	1,42
24	13	18	5	0,19	0,04
25	6	12	6	1,19	1,42
26	4	13	9	4,19	17,56
27	7	10	3	-1,81	3,27
28	15	11	-4	-8,81	77,61
29	18	6	-12	-16,81	282,56
30	2	20	18	13,19	173,99
31	15	16	1	-3,81	14,51
32	13	20	7	2,19	4,80
33	8	20	12	7,19	51,70
34	3	19	16	11,19	125,23
35	16	20	4	-0,81	0,66
36	6	20	14	9,19	84,46
37	10	20	10	5,19	26,94
38	2	5	3	-1,81	3,27
39	18	10	-8	-12,81	164,08
40	3	13	10	5,19	26,94
41	7	11	4	-0,81	0,66
42	4	6	2	-2,81	7,89
			202		2530,48

Fuente: Evaluaciones de los estudiantes del grupo de intervención antes-después de aplicado el experimento.
Elaborado por: El autor

dpromedio= dprom. $= \frac{\Sigma d}{N} = \frac{202}{42} = 4{,}8095$

$\sigma d = \sqrt{\frac{\Sigma\,(\,d - dpro)^2}{N-1}}$

$= \sqrt{\frac{(\,2530{,}48)}{41}} = 7{,}8561$

to $= \frac{d.pro}{\frac{\sigma d}{\sqrt{N}}} = \frac{4{,}8095}{\frac{7{,}8561}{6{,}4807}} = \frac{4{,}8095}{7{,}8561} = 3{,}9672$

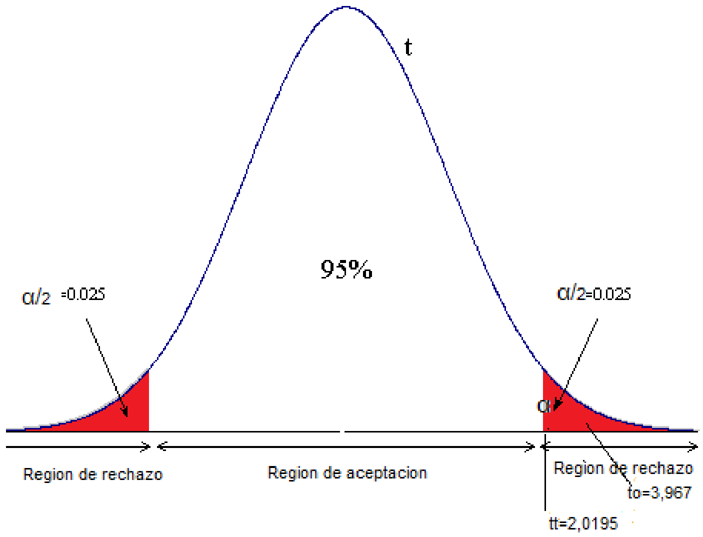
dprom	4,80952381
σd	7,8566
gl	41
to	3,9672
α	0,05
tt	2,0195

El valor calculado de t (3,9672) comparamos con los valores críticos de la distribución t (tabla) y se observa que a una probabilidad de 0,05 le corresponde un valor de 2,0195 de t. Por lo tanto, el cálculo tiene una probabilidad menor que 0,05.

2.4.3. Decisión.

Como to es de 3,9672, con 41 grados de libertad, tiene un valor de probabilidad menor que 0,05, entonces se acepta Ha y se rechaza Ho. Además como to > tt se verifica el rechazo de Ho. Por consiguiente la implementación y aplicación de las prácticas de laboratorio experimental como propuesta metodológica, influyen positivamente en el aprendizaje de la Geometría Plana de figuras regulares en los estudiantes de Décimo Año de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja.

P (0,05) < α = 0,05 se rechaza Ho.



Fuente: Tabla 5.
Elaborado por: El autor.

2.4.4. Interpretación.

El aprendizaje de la Geometría, implementado prácticas experimentales de laboratorio provisto de software y material concreto como herramientas cognitivas mejoró el aprendizaje, existiendo diferencias significativas entre antes y después. En tal sentido, los resultados obtenidos apoyan la posibilidad de que existe relación entre el uso de estrategias basadas en el software GeoGebra y material concreto como herramientas cognitivas y la obtención de mejoras en los conocimientos y destrezas de los estudiantes.

Por otra parte la presencia del grupo de control nos permitió conocer con exactitud que fue el tratamiento y no otros factores lo que produjo las diferencias antes y después del tratamiento. Por lo tanto para complementar la investigación y darle mayor validez, se recolectaron ciertos datos cualitativos, relacionados con la utilización del software y material concreto que incidieron en el rendimiento académico; dichos datos se obtuvieron a través de informes y encuestas. Cabe destacar que el promedio de notas obtenido por el grupo de intervención fue de 16,21 sobre el total de 20 puntos.

2.4.5. ENCUESTA 01

Dirigida a los estudiantes de décimo año **A** de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja para recoger información sobre el uso del software y material concreto en el desarrollo de las prácticas de laboratorio experimental de Geometría.

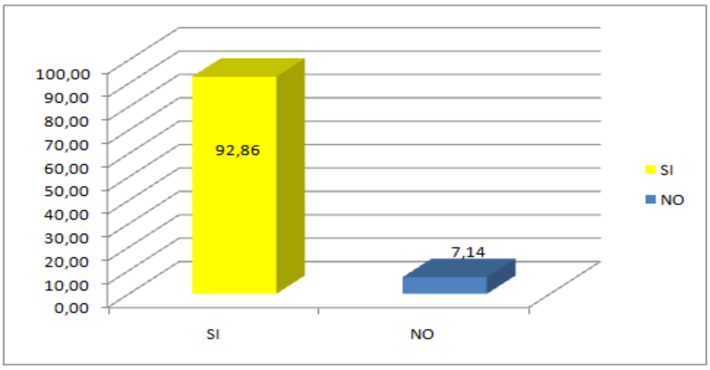
INSTRUCCIONES.- Marque con un aspa dentro del paréntesis la opción que considere correcta.

1) ¿Cree Ud. que por lo general los estudiantes de Educación General Básica del colegio Rafael Borja están preparados para el manejo de las Tecnologías de la Información y Comunicación?

Tabla1

VARIABLES	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
SI	39	92,86%
NO	3	7,14%
TOTAL	**42**	**100%**

Fuente: Pregunta 1 encuesta 01
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 1
Elaborado por: El autor

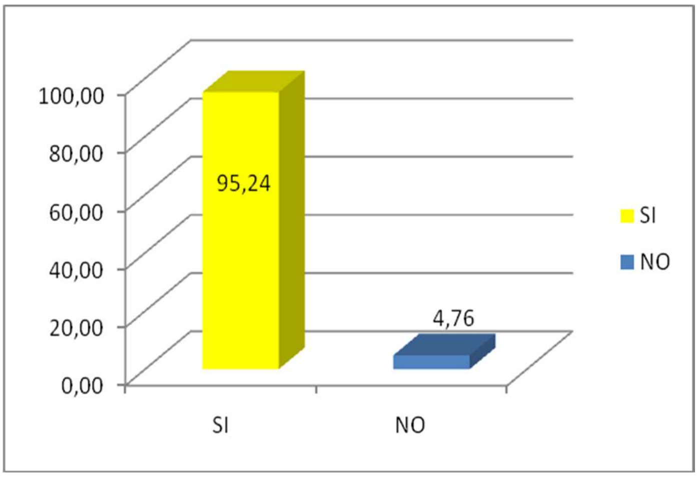
Interpretación.- Del total de los 42 estudiantes encuestados del Décimo de Educación General Básica “A”; el 92.86% de los mismos, considera que si está preparado para el uso de las tecnologías de la información, en tanto que un 7,14 piensa que no. Los estudiantes de la institución acceden desde Primer Año de Educación General Básica al laboratorio de informática, por lo que el uso de los paquetes básicos como Word, Excel, Power Point fueron muy familiares para ellos, además en su totalidad disponen de una laptop personal e internet en sus casas, por lo que acceder a la información y emplear computadora se tornó muy fácil y no representó una dificultad.

2) ¿Piensa que por lo general está preparado para desarrollar prácticas de laboratorio con el uso del software y material concreto?

Tabla 2

VARIABLES	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
SI	40	95,24%
NO	2	4,76%
TOTAL	**42**	**100%**

Fuente: Pregunta 2 encuesta 01
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 2 encuesta 01
Elaborado por: El autor

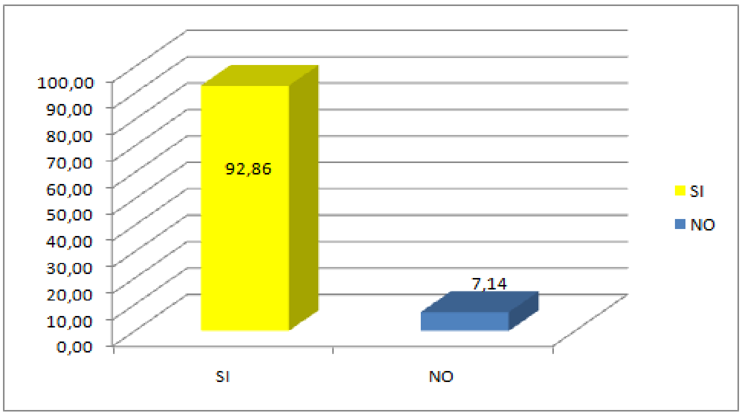
Interpretación.- De acuerdo a los datos que proyecta este indicador el 95.24% de los estudiantes está capacitado para utilizar software en el desarrollo de las prácticas de laboratorio, esto se debe en gran parte a que antes de iniciar con el estudio del bloque de Geometría, con ayuda del centro de cómputo de la institución se adiestró a los estudiantes en el uso del software GeoGebra, especialmente en el manejo de las opciones que permiten el cálculo de áreas, volúmenes, perímetros, ángulos y otros. En lo que respecta a la utilización de material concreto como foamy y papel milimetrado a escalas, los estudiantes en bloques anteriores como el de vectores y ecuaciones cuadráticas ya lo emplearon por lo que estaban familiarizados con su uso.

3) **¿Cree Ud. que con la aplicación de prácticas experimentales de laboratorio provisto de Software y Material Concreto se alcanza un mejor aprendizaje de la Geometría?**

Tabla 3.

VARIABLES	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
SI	39	92,86%
NO	3	7,14%
TOTAL	**42**	**100%**

Fuente: Pregunta 3 encuesta 01
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 3 encuesta 01
Elaborado por: El autor

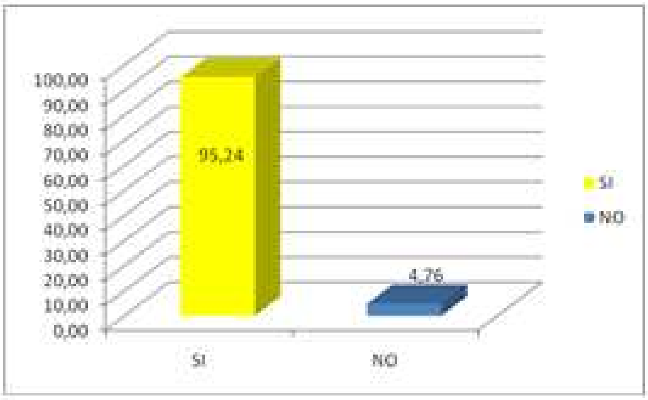
Interpretación.- La respuesta a este indicador es muy representativa un 92,86% de los estudiantes asevera que el aprendizaje de la geometría mejora sustancialmente con la utilización del software y material concreto en el aula. Como estas herramientas didácticas estuvieron a disposición de los alumnos, las posibilidades para asentir a nuevos conocimientos se ampliaron notablemente, por un lado lograron representar, manipular, interpretar, organizar, comunicar y expresar sus ideas, liberándose de memorizaciones y rutinas innecesarias, haciendo más fácil el desarrollo de ciertas tareas, reduciendo el esfuerzo mental, facilitando las representaciones de objetos, permitiendo su exploración y visualización. Por otro lado, la aplicación del software y material concreto, mantuvo en el dicente latente el interés durante el desarrollo de las prácticas experimentales, se incrementó la motivación, la creatividad y el trabajo cooperativo, realizando un aporte sustancial a la construcción del conocimiento, generando ambientes de aprendizajes óptimos en donde la resolución de problemas jugaron un papel importante porque estaban íntimamente ligados con la vida cotidiana, ya que se usaron datos reales.

4) **¿Serán las prácticas experimentales del laboratorio provisto de software y material concreto una herramienta necesaria para volver el aprendizaje más activo, dinámico y participativo?**

Tabla 4

VARIABLES	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
SI	40	95,24%
NO	2	4,76%
TOTAL	**42**	**100%**

Fuente: Pregunta 4 encuesta 01
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 4 encuesta 01
Elaborado por: El autor

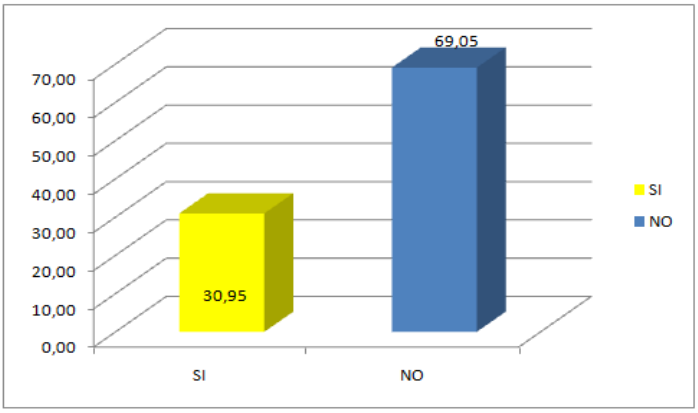
Interpretación.- Un porcentaje apreciable de un 95,24% de los estudiantes del Décimo Año de Educación Básica paralelo "A", consideraron que el uso del material concreto y software matemático como herramientas didácticas, incidió directamente en la construcción de un aprendizaje más activo, involucrando a que los estudiantes participen más en el proceso pedagógico, permitió que sean los protagonistas de las actividades planificadas para el desarrollo de las prácticas, inyectándole un dinamismo que facilitó obtener las destrezas con criterio de desempeño planteadas previamente para el bloque de geometría. Por otro lado la aplicación del software y material concreto en las prácticas, fortalecieron gratamente las relaciones entre el colectivo del alumnado, por cuanto compartieron experiencias, los alumnos que más entendían ofrecían alternativas a los que menos comprendían logrando una gran transmisión de conocimientos.

5) En la actualidad luego de haber experimentado el uso del software y material concreto, ¿Tú concibes una clase de Geometría sin estas herramientas?

Tabla 5.

VARIABLES	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
SI	13	30,95
NO	29	69,05
TOTAL	42	100

Fuente: Pregunta 5 encuesta 01
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 5 encuesta 01
Elaborado por: El autor

Interpretación.- Un porcentaje del 69.05% de los estudiantes manifiestan que luego de haber experimentado las bondades que brinda el software en el aula y las innovaciones que se dieron en el ámbito de la enseñanza aprendizaje de la geometría, concluyeron que en la actualidad resulta difícil por no decir imposible concebir una clase de geometría sin estas herramientas didácticas, que permiten acceder a conocimientos más significativos en donde el alumno construye su propio aprendizaje, bajo la tutela del docente, que se convierte en facilitador. Con el software educativo se redujo el tiempo de que se dispone para importar gran cantidad de conocimientos facilitando el trabajo diferenciado, el estudiante se introdujo en un campo donde las soluciones a diversas situaciones de aprendizaje eran concretas, iban desde la introducción de contenidos nuevos, al desarrollo y consolidación de habilidades, llegando incluso a proponer tareas para la casa, lo que convirtió al software en una alternativa válida que ofreció al estudiante un ambiente propicio para la construcción del conocimiento y del cual se hizo cada vez más difícil de prescindir.

ENCUESTA 02

Dirigida a los estudiantes de décimo año de E.G.B del Colegio Rafael Borja para recoger información sobre el grado de satisfacción que estos experimentan con el uso del software matemático y material concreto como herramientas didácticas para desarrollar prácticas experimentales de laboratorio de Geometría.

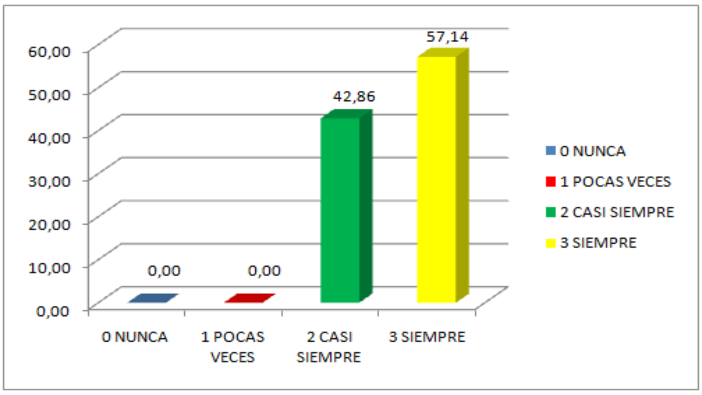
INSTRUCCIONES.- Marque con un aspa dentro del paréntesis la opción que considere correcta.

1) ¿Facilita el uso de nuevas estrategias el aprendizaje?

Tabla 1.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	0	0,00
2 CASI SIEMPRE	18	42,86
3 SIEMPRE	24	57,14
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 1 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 1 encuesta 02
Elaborado por: El autor

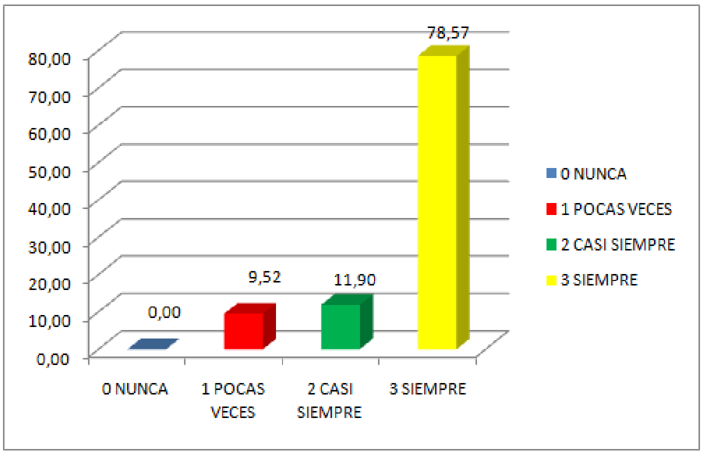
Interpretación.- De acuerdo a los porcentajes de 40,48% y 54,/6% correspondientes a las opciones casi siempre y siempre respectivamente que los alumnos han seleccionado mayoritariamente, se puede inferir que tanto el software como el material concreto utilizados como herramientas didácticas en las practicas permitió desarrollar conocimientos más sólidos de la geometría en base a la combinación de textos, vídeos, imágenes, gráficos, sonidos entre otros, lo que ocasionó que los contenidos se profundicen más y los conceptos se comprendan mejor, disminuyendo el grado de abstracción de los mismos.

2) ¿Capta tu atención y motivación?

Tabla 2.

Variables	**Frecuencia Absoluta**	**Frecuencia Relativa %**
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	4	9,52
2 CASI SIEMPRE	5	11,90
3 SIEMPRE	33	78,57
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 2 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 2 encuesta 02
Elaborado por: El autor

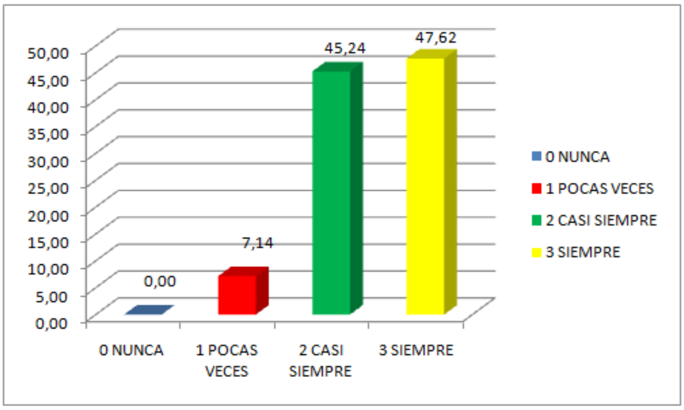
Interpretación.- Definitivamente la opción siempre con un porcentaje de un 78,57%, frente a la opción casi siempre con un porcentaje de un 11,90%, que los estudiantes seleccionaron y demostraron que la introducción de material concreto y del software con una interfaz atractiva, claro, sin excesos visuales, funcional, con elementos gráficos resaltando el contenido y permitiendo su fácil manipulación; fue lo que mantuvo latente el interés de los estudiantes durante las prácticas. Además, los estudiantes se sentían motivados e interesados por el software educativo GeoGebra, porque en el programa se incluyen elementos para captar la atención, y cuando es necesario, estos se focalizan hacia los aspectos más importantes de las prácticas. Se comprobó que la función motivadora es una de las características más importantes de este tipo de materiales didácticos, porque incrementa una actitud positiva para aprender en forma activa.

3) ¿Mejora la participación de los estudiantes?

Tabla 3.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	3	7,14
2 CASI SIEMPRE	19	45,24
3 SIEMPRE	20	47,62
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 3 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 3 encuesta 02
Elaborado por: El autor

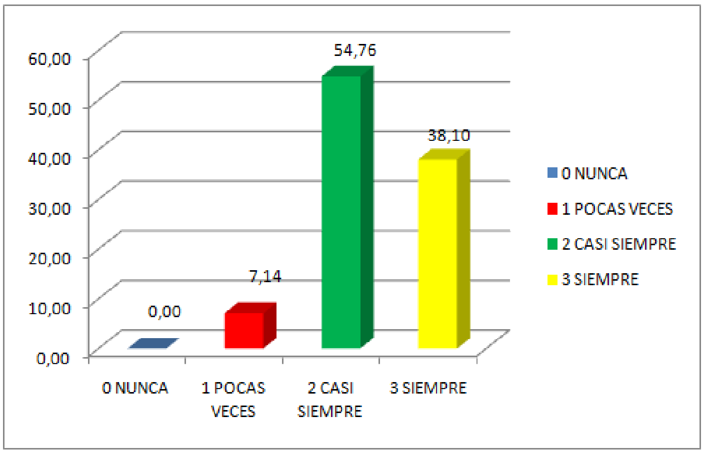
Interpretación.- La opción casi siempre y siempre con un porcentaje casi similar de un 45,245% y 47,62 % respectivamente son las que predominan en este indicador, lo que implica establecer que los estudiantes en su mayoría coincidieron en que la inclusión del software y del material concreto en el aula aumentó su interactividad considerablemente, con respecto a la que tenía en las clases tradicionales en donde eran simples espectadores, pues el software además de tener propósitos educativos, aprovecha sus aspectos funcionales como son la multimedia, la programación y los medios de distribución que integrados con los pedagógicos exponen con claridad el contenido que pretenden desarrollar, haciendo que el estudiante participe activamente en el proceso de aprendizaje de la Geometría ya sea calculando áreas, volúmenes, perímetros o construyendo gráficos de figuras geométricas tanto regulares como irregulares.

4) ¿Individualiza tu aprendizaje?

Tabla 4.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	3	7,14
2 CASI SIEMPRE	23	54,76
3 SIEMPRE	16	38,10
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 4 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 4 encuesta 02
Elaborado por: El autor

Interpretación.- El uso del software en las prácticas fomentó la iniciativa y el aprendizaje autónomo, lo que permitió individualizar la enseñanza y por lo tanto brindar una atención diferenciada a los estudiantes en las prácticas. Uno de los principales objetivos del software educativo, es despertar y mantener latente el interés, facilitar la asimilación de conocimientos nuevos, relacionarlos con otros, pero muy a nuestro pesar esa motivación no tiene la misma intensidad en todos los estudiantes, es diferenciada, tiende a individualizar el aprendizaje.

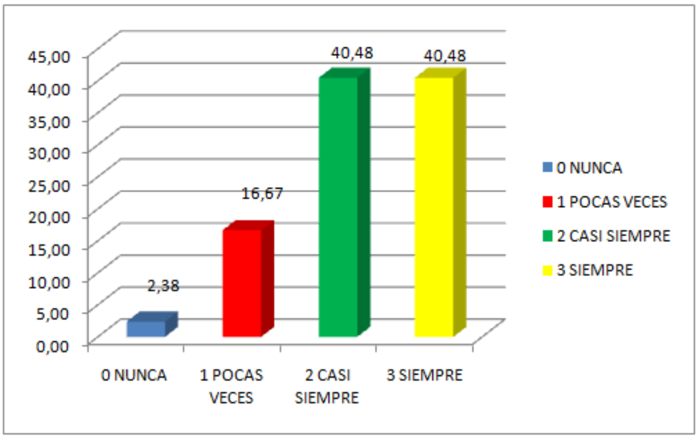
En la gráfica de frecuencias correspondientes al indicador **individualiza tu aprendizaje,** la opción casi siempre al tener un porcentaje mayor (54,76%) frente a la opción siempre (38,10%); nos lleva a pensar que esa diferencia se debió fundamentalmente a que ciertos estudiantes no alcanzaron las destrezas necesarias en el uso del software debido a la falta de práctica, tenían dificultades en el manejo de ciertas menús, lo que repercutió en la evaluación de los informes de laboratorio. El uso del software le permitió la estudiante formar conceptos, ejercitar y resolver problemas, graficas, simplificaciones, realizar cálculos complicados de una manera rápida, aporto realismo a las aplicaciones. Además, permitió que por medio de la manipulación los conocimientos de la geometría se tornaran atractivos, interesantes y útiles en un sinfín de manifestaciones de nuestra vida cotidiana.

5) ¿Facilita tu trabajo escolar?

Tabla 5.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	1	2,38
1 POCAS VECES	2	4,76
2 CASI SIEMPRE	18	42,86
3 SIEMPRE	21	50,00
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 5 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 5 encuesta 02
Elaborado por: El autor

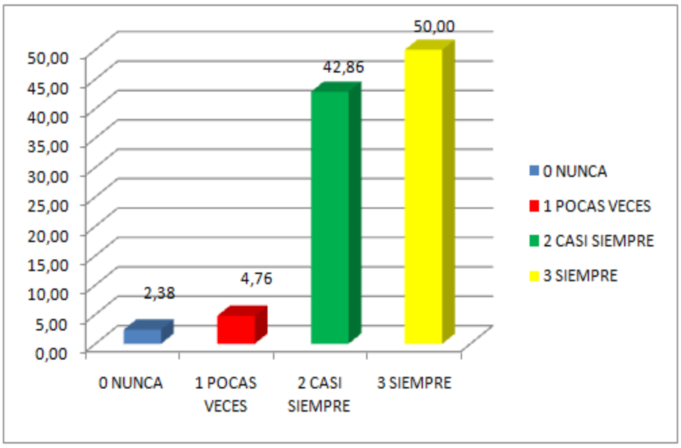
Interpretación.- En este indicador existe una igualdad de resultados entre las opciones casi siempre y siempre, de acuerdo a lo observado en las prácticas los estudiantes se apoyaron en el software para ejecutar investigaciones, variar las condiciones y parámetros del ejercicio, programar secuencias con el objetivo de explorar y comprender conceptos, realizar cálculos de manera rápida y confiable, variar gráficos y observar los cambios ocurridos, realizaron análisis y comparaciones, conectando la teoría con la práctica. Además se observaron opiniones relativas al ahorro del tiempo y el esfuerzo al usar el software.

6) ¿Facilita el recuerdo de la información?

Tabla 6.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	1	2,38
1 POCAS VECES	7	16,67
2 CASI SIEMPRE	17	40,48
3 SIEMPRE	17	40,48
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 6 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 6 encuesta 02
Elaborado por: El autor

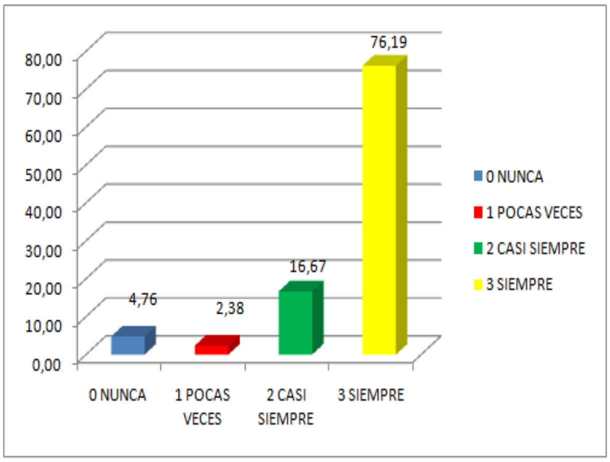
Interpretación.- En el indicador, **facilita el recuerdo de la información,** las opciones casi siempre y siempre con porcentajes de 42,85% y 50% respectivamente, denotaron claramente que para los alumnos el uso del software facilitó tener la información y los resultados siempre a mano en la hoja de trabajo, por lo que pudieron ser consultados cuando era necesario, o calcular otros si hacía falta. El software sirvió al estudiante como soporte de ideas y resultados en donde el repaso de la información antes adquirida, le brindo la posibilidad de ampliar y analizar nuevos contenidos, que permitan aclarar dudas y facilitar la comprensión de los conceptos más abstractos. No obstante, las observaciones realizadas a los estudiantes reflejaron que este proceso requiere de la revisión constante de la teoría.

7) **¿Muestra satisfacción por el uso de esta herramienta en el aprendizaje de Geometría?**

Tabla 7.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	2	4,76
1 POCAS VECES	1	2,38
2 CASI SIEMPRE	7	16,67
3 SIEMPRE	32	76,19
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 7 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 7 encuesta 02
Elaborado por: El autor

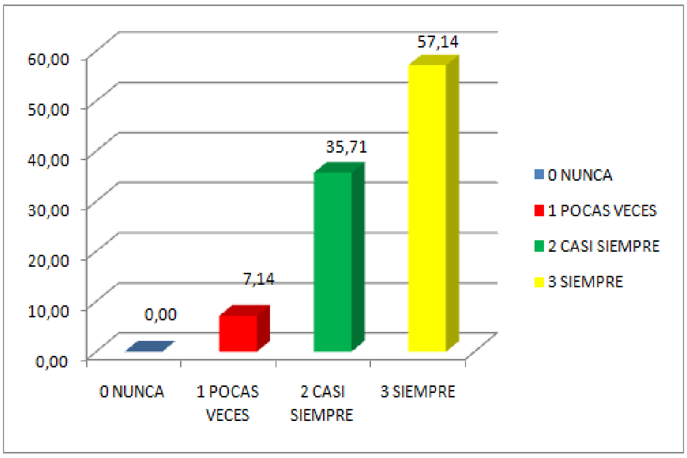
Interpretación.- Si 32 de 42 estudiantes encuestados, lo que representa un 76,19%, se inclinó por la opción **siempre** de este indicador, significa que los estudiantes todo el tiempo que emplearon el software para aprender Geometría, se sintieron identificados, mostraron satisfacción con sus aplicaciones, con su interfaz, con su fácil operatividad y sobre todo con la forma como se abordó el proceso pedagógico, se observó que mejoró la calidad de la educación y generó nuevas posibilidades de desarrollo individual.

8) ¿Crea y modifica actitudes positivas?

Tabla 8.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	3	7,14
2 CASI SIEMPRE	15	35,71
3 SIEMPRE	24	57,14
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 8 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 8 encuesta 02
Elaborado por: El autor

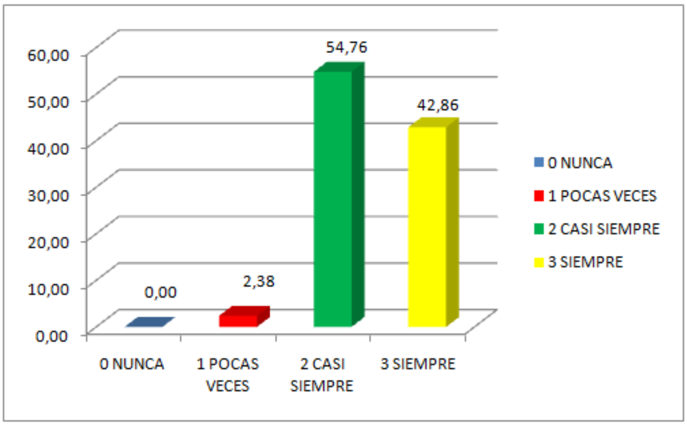
Interpretación.- De acuerdo a los resultados arrojados por el indicador **crea y modifica actitudes positivas,** la utilización del software GeoGebra en el estudio del bloque de Geometría cambió sustancialmente el criterio que los estudiantes tenían de como estudiar la matemática, en primer lugar se detectó un cambio de actitud hacia la construcción de figuras, ya no eran esas figuras demoradas y difíciles de construir, se generó hábitos de estudio, aumentó su capacidad interactiva, fomentó su responsabilidad, puntualidad en la entrega de los informes, aprendió a modelar problemas, a desarrollar un aprendizaje autónomo, a realizar cálculos precisos y rápidos, aumentó la capacidad de razonar entre otros.

9) ¿Crea mayor capacidad para resolver situaciones matemáticas?

Tabla 9.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
2 POCAS VECES	1	2,38
3 CASI SIEMPRE	23	54,76
4 SIEMPRE	18	42,86
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 9 encuesta 0
Elaborado por: El autor



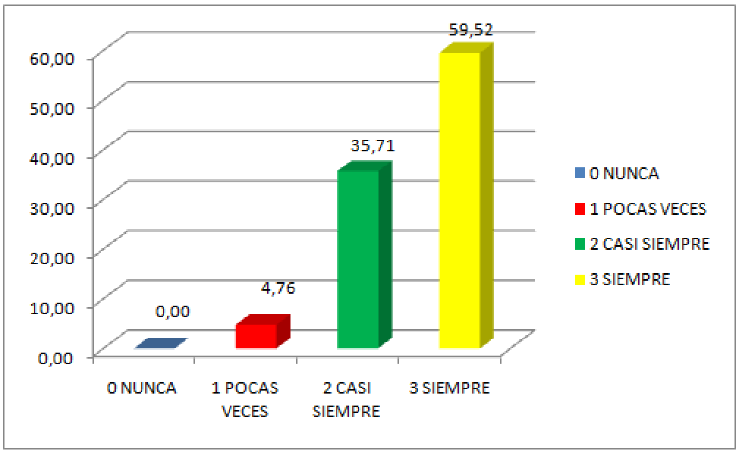
Fuente: Tabla 9 encuesta 02
Elaborado por: El autor

Interpretación.- Con un porcentaje de 54,57% que corresponde a 23 estudiantes de un total de 42, se observa que en el indicador **crea mayor capacidad para resolver situaciones matemáticas,** de acuerdo a lo observado los estudiantes con el uso del software y material concreto lograron resolver problemas concretos y relacionarlos entre sí, realizaron cálculos precisos y rápidos, construyeron figuras complejas, analizaron respuestas, analizaron contradicciones, realizaron comparaciones; conectando la teoría con la práctica, situaciones que de la manera tradicional no hubiera sido posible.

10) **¿Permite el acceso a más información**?

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	2	4,76
2 CASI SIEMPRE	15	35,71
3 SIEMPRE	25	59,52
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 10 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 10 encuesta 02
Elaborado por: El autor

Interpretación.- Un 59,52% de la opción siempre y un 35% de la opción casi siempre indican que los estudiantes fueron coherentes en sus aseveraciones al afirmar que el software matemático permite el acceso a abundante información y más aún en esta nueva era en donde se respira tecnología. Con el uso del software los estudiantes tuvieron la oportunidad de navegar en la red, acceder a wikis[18], applets, en donde el estudiante pudo crear, modificar, borrar el contenido de una página web de una manera interactiva, fácil, rápida, así como subir y almacenar documentos; información que posteriormente utilizaron en la elaboración de los informes de prácticas.

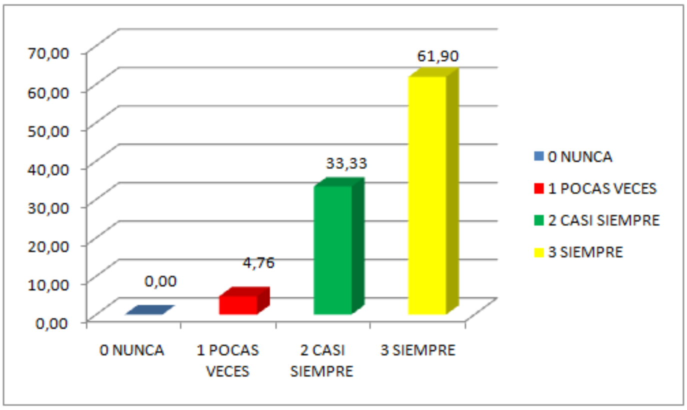
11) ¿Facilita la manipulación el uso del software matemático y material concreto?

Tabla 11.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	2	4,76
2 CASI SIEMPRE	14	33,33
3 SIEMPRE	26	61,90
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 11 encuesta 02
Elaborado por: El autor

[18] Wiki es un sitio web colaborativo que puede ser editado por varios usuarios.



Fuente: Tabla 11 encuesta 02
Elaborado por: El autor

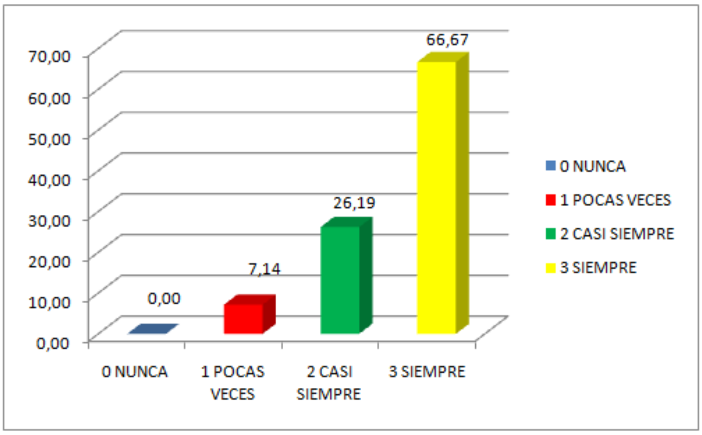
Interpretación.- En el indicador **Facilita la manipulación el uso del software y material concreto,** un 61,90% de los estudiantes seleccionaron la alternativa casi siempre y un 33,33% la opción siempre, lo que deja ver claramente, que el estudiante cuando manipuló, tanto, el material foamy como el software GeoGebra, en el transcurso de las prácticas de laboratorio de Geometría, tuvo más facilidad en diseñar actividades novedosas, aumentando su curiosidad sobre las cosas poco conocidas, se incrementó el interés, la motivación, el involucramiento y el dominio de las metas matemáticas.

12) ¿Visualiza y tienes una mejor ubicación espacial de las figuras con el uso del software matemático?

Tabla 12.

Variables	**Frecuencia Absoluta**	**Frecuencia Relativa %**
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	3	7,14
2 CASI SIEMPRE	11	26,19
3 SIEMPRE	28	66,67
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 12 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 12 encuesta 02
Elaborado por: El autor

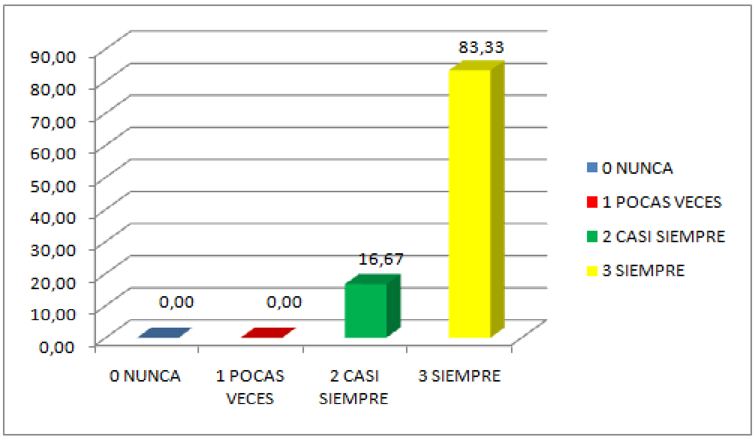
Interpretación.- En este indicador un 92,86% de los estudiantes se reparten las alternativas siempre y casi siempre con porcentajes de 66,67 y 26,19 % respectivamente. El estudiante cuando utiliza el software durante las prácticas, tenía la posibilidad de hacer girar las figuras, de trasladarlas, cambiarlas de posición, visualizarlas en el plano y en el espacio; lo que le facilitaba tener un mejor enfoque de los elementos geométricos que conforman la figura y una mejor ubicación de los mismos, permitiéndoles de esta manera tomar decisiones más apropiadas el momento de resolver problemas.

13)¿El uso del software permite guardar y recuperar información para tu reutilización?

Tabla 13.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	0	0,00
1 POCAS VECES	0	0,00
2 CASI SIEMPRE	7	16,67
3 SIEMPRE	35	83,33
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 13 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 13 encuesta 02
Elaborado por: El autor

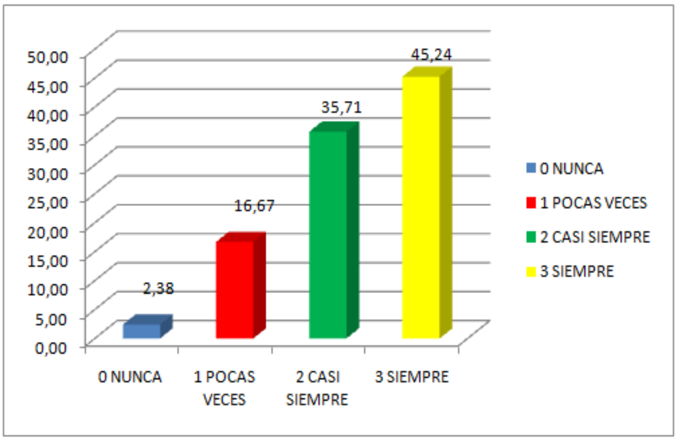
Interpretación.- Al analizar los datos arrojados en la tabla y gráfico correspondiente al indicador **"El uso del software permite guardar y recuperar información para su reutilización".** El más alto porcentaje de 83,33% representa a la opción siempre, esto se debió a que durante el desarrollo de las prácticas de laboratorio de Geometría, los estudiantes recurrían constantemente a guardar la información sobre los diferentes cálculos y construcciones gráficas que se realizaban, así como las consultas a applets y diferentes portales para obtener un marco teórico relevante en la web, lo que posteriormente se utilizaban para la elaboración final y presentación de los informes de laboratorio. La utilización del software además de favorecer los procesos inductivos, aportó realismo a las aplicaciones, visualizaron las figuras de una manera menos compleja, favoreciendo las construcciones; permitió comparar, verificar, cambiar pasos o secuencias que debían ser modificados o mejorados y todo esto fue posible sin tener que repetir pasos largos, tediosos, porque recurrieron a la opción de guardar y reutilizar cuando lo consideraron pertinente.

14) ¿Las actividades prácticas del laboratorio con software y material concreto se realizan mejor en grupos?

Tabla 14.

Variables	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa %
0 NUNCA	1	2,38
1 POCAS VECES	7	16,67
2 CASI SIEMPRE	15	35,71
3 SIEMPRE	19	45,24
TOTAL	**42**	**100,00**

Fuente: Pregunta 14 encuesta 02
Elaborado por: El autor



Fuente: Tabla 14 encuesta 02
Elaborado por: El autor

Interpretación.- Por los datos expuestos en la tabla y representados en la gráfica correspondiente, los alumnos confirman lo que experimentaron en el desarrollo de las prácticas de laboratorio de Geometría en donde al trabajar con compañeros en grupos, la mayoría de los alumnos sentían menos vergüenza y podían hacer preguntas sin sentirse intimidados. También explicaban fácilmente lo que entendían a sus compañeros o proponían al grupo diversos enfoques para la resolución de problemas. Por el hecho de que escuchaban a los compañeros dentro del grupo, los estudiantes mejoraron su comunicación, su capacidad de análisis, reflexión y formulaban su propio entendimiento.

Aprendieron a valorar las opiniones de los demás porque, a veces, una estrategia diferente podía ser mejor para resolver un problema. Como los diferentes grupos demostraron tener éxito en lograr un objetivo común en cada una de las prácticas realizadas, sus miembros demostraron tener una mayor motivación y más seguridad en sí mismos que cuando trabajan individualmente.

2.4.6. Algunas opiniones de los estudiantes

"…Estamos conscientes de que el apoyo y la dirección del profesor es importante…".

"…El software nos permite realizar cálculos, gráficos y facilita la organización de la información. Nos permite aclarar dudas; claro bajo la dirección del profesor, la cual es necesaria".

"…Creemos que para usar el software y aprender matemática, la orientación del profesor es fundamental".

"…en repetidas ocasiones logramos construir ideas, expresarlas correctamente, con ayuda de los cálculos y gráficos que realizamos con el software. Aquí la orientación del docente es clave".

“... El software es muy útil ya que logramos aplicar la teoría, hacer cálculos, gráficos y tablas pero con la dirección del profesor”.

“…El software nos ayudó con su rapidez y exactitud en los cálculos. Sin embargo el apoyo del profesor es fundamental”.

“…nos permite ahorrar tiempo en la resolución de problemas, comprobar resultados y corregir respuestas de ejercicios que realizamos en forma manual”.

“…Con el software teníamos más tiempo para pensar en la resolución de los ejercicios difíciles, lo que nos impulsaba y permitía crear diferentes maneras de resolver”.

“... las clases de geometría se volvieron más agradables, participábamos todo el tiempo, nos llamaba mucho la atención especialmente construir gráficos”.
“… Tocar las figuras, tenerlas ahí a la vista, cambiarlas de posición, medirlas y con esos datos realizar cálculos nos motivó mucho”.

“…es emocionante probar ideas en la computadora, nos sentimos seguros de los resultados”.

“… sirvió de apoyo para visualizar gráficas, manipularlas y analizarlas”.

“…nos ayudaron mucho en la elaboración de los informes de laboratorio”.

Como se observa algunas de las opiniones manifiestan que el uso del software no exime de la presencia del docente y considera que su dirección es fundamental.
De lo expuesto, se determina que existe la posibilidad de una superación en el aprendizaje, utilizando el software y material concreto como herramientas didácticas en el desarrollo de prácticas de laboratorio experimental de Geometría en la población estudiantil intervenida. Sin embargo se sugiere realizar un estudio más profundo en torno a ello, pues los estudiantes pusieron en práctica las habilidades cognitivas y matacognitivas en un tema de las matemáticas, correspondiente al décimo año de educación general básica. Para dejar una verdadera huella, es necesario extender la cobertura del material concreto y en especial del software a toda la malla curricular de la matemática y a otros grupos de alumnos. De esta manera los efectos de la intervención educativa pueden comprobarse con resultados de cursos anteriores. También se recomienda realizar un seguimiento a los estudiantes que participaron en el estudio para verificar si siguen usando las habilidades en cursos superiores y perfeccionando los mismos.

2.4.7. Discusión

Los resultados confirmaron que los conocimientos de los alumnos mejoraron, con la aplicación de las estrategias basadas en el software matemático y material concreto, pues su rendimiento académico en términos generales mejoró. En cuanto a los conocimientos conceptuales se evidenció que la población estudiantil conocía las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de las figuras regulares más comunes, así como conceptos, algoritmos, teoremas y representaciones gráficas. En cuanto a los conocimientos de procedimientos, se observó una mayor disponibilidad, seguridad y destreza, en el manejo de fórmulas, realización de representaciones gráficas, aplicación de algoritmos, resolución de problema y presentación de informes de prácticas en forma coherente y ordenada.

También, se observó pero en menor grado la aplicación de teoremas en forma lógica y el manejo de técnicas de resolución de problemas. Sin embargo el rendimiento en la última prueba exploratoria aumentó. Rendimiento que refleja la aparición del aprendizaje, lo que permite pensar en la posibilidad de una mejora en los conocimientos de los estudiantes.

Lo anterior me permite aseverar que es posible integrar el material concreto y el software matemático al trabajo intelectual del alumno, tal como lo señalaron Osteiza y Silva *enfocando el uso del software hacia la enseñanza de la asignatura y facilitando que el alumno aprenda a procesar la información de la materia* (34). Estos resultados fueron señalados por Esteban, quien manifestó la idea de *usar las tecnologías como herramientas para promover el conocimiento de los alumnos y dar apoyo para la comprensión de conceptos.* (29).

Por otra parte se evidencia que las estrategias empleadas ayudaron a los alumnos a comparar, visualizar, verificar, graficar, seguir algoritmos. Por lo tanto, el software sirvió de apoyo para facilitar la comprensión y aprendizaje de los contenidos de Geometría, inmersos dentro de la malla curricular de la asignatura haciendo más fácil su asimilación, aspectos destacados también por Ángel y Bautista y que señalamos en el marco teórico. Así mismo los resultados determinaron que la población de estudiantes puso en práctica "*habilidades cognoscitivas y matacognitivas, pues con estas herramientas, lograron calcular, graficar, copiar trasladar, ordenar, borrar, insertar, manipular, entre otros, lo que permitió generar y organizar las ideas para actuar posteriormente con ellas y así apoyar su proceso de aprender"* (Esteban, 34).

Las opiniones que los alumnos manifestaron en las encuestas, reflejaron que utilizando como soporte las capacidades informáticas del software lograron poner en práctica sus habilidades. Es decir, establecieron similitudes y generalizaciones, formularon, graficaron, elaboraron planes, eliminaron soluciones incorrectas e ineficientes, tomaron decisiones relacionadas: cómo, cuándo y dónde utilizar el computador, organizaron estrategias e ideas, ensayaron procedimientos, supervisaron, evaluaron el proceso seguido. Cabe destacar que todas estas posibilidades pertenecen al pensamiento complejo y según Martínez, "*son aspectos esenciales para el desarrollo de habilidades matacognitivas*" (22). Además, "*poner en práctica habilidades cognitivas y matacognitivas es importante, pues estas pueden ser desarrolladas a través de su ejercitación constante*" (Sánchez 32). Por lo tanto, se fortalece la idea de que "*las herramientas informáticas, vinculadas a experiencias significativas, se constituyen en herramientas cognitivas que los alumnos pueden usar para desarrollar habilidades del pensamiento"* (Jonassen, Carr y Ping 19).

Lo expuesto, confirma ciertas concepciones encontradas en la revisión de la literatura: a*) el uso de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas permiten en el dicente el desarrollo de actividades del pensamiento como: explorar, inferir, hacer conjeturas, justificar, argumentar y de esta forma construir su propio conocimiento* (Fernández, Izquierdo y Lima 25); (b) *el computador puede construir herramientas cognitivas que el dicente logra utilizar para estimular y desarrollar habilidades del pensamiento* (Jonassen, Carr y Ping 21) Y (c) *el computador le permite aplicar eficientemente sus esfuerzos y poner en marcha mecanismos más complejos del pensamiento* (Márquez 18).

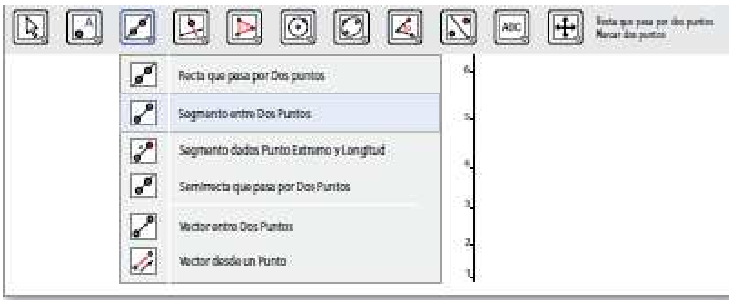
Todo lo antes desarrollado, nos hace ver que la utilización del software y material concreto en las clases de geometría "*facilita el aprendizaje del estudiante, permitiéndole desarrollar estrategias cognitivas de orden superior y otras destrezas intelectuales*" (Ríos 19). Como se puede evidenciar, no solo debe contar la opinión de los pedagogos, de los expertos en software, se debe continuar buscando mejores estrategias que permitan desarrollar destrezas con criterio de desempeño, que nos guíen hacia aprendizajes más efectivos y significativos

CAPITULO III

Prácticas experimentales de laboratorio y Geometría

3.1. **Procedimientos para prácticas de laboratorio experimental**.

Previo al inicio de las prácticas experimentales, es indispensable que el docente desarrolle destrezas con los estudiantes en el uso del GeoGebra, especialmente en el manejo de las opciones: punto nuevo, segmento entre dos puntos, elige y mueve, recta que pasa por dos puntos, recta paralela, recta perpendicular, tangente, polígono, polígono regular, circunferencia; dado su centro y radio, ángulo, longitud, área e insertar texto, entre las más usadas para la construcción de gráficas.



Fuente: Gráfico tomado del software geogebra

Luego para el desarrollo de las prácticas de laboratorio de geometría procederemos de la siguiente manera:

Organización de la clase: todas las prácticas de geometría, para décimo año de educación básica, han sido experimentadas en nuestras clases, con un solo profesor y entre 25 a 30 alumnos. No obstante, considero que para trabajar de manera óptima con ellos, la clase tendría que dividirse en 10 grupos de tres personas, o bien que dos profesores estuvieran a la vez atendiendo simultáneamente a los alumnos del grupo.

Presentación de la actividad: el profesor es quien organiza, orienta y guía el trabajo de los alumnos. Antes de repartir el material hay que explicar claramente lo que se va a hacer y qué se espera de ellos.

Sugerimos los siguientes pasos:

- Hacer una breve introducción a la práctica.
- Explicar lo que tienen que hacer con el material[19].
- Dar a conocer los objetivos.
- Aclarar que su trabajo y sus reflexiones, deben quedar recogidos en el informe que el alumno entregará al final de la práctica.

Después de repartir el material de trabajo, el profesor debe observar lo que hace cada grupo y cada estudiante dentro del grupo o en su tarea individual. A veces, tendrá que cambiar el material o reorientar la actividad de los estudiantes que terminan pronto o que se ven desbordados por la tarea. El nivel asignado a cada tarea es orientativo.

Agrupamiento de los estudiantes: algunas actividades están previstas para que los alumnos las realicen individualmente, otras en parejas, otras en grupos de tres y otras con toda la clase. Es conveniente que sea el profesor quien organice los grupos. Tendrá que decidir si estos son homogéneos o heterogéneos según los objetivos que se propone con la actividad elegida o según las características de la clase.

Desarrollo de la actividad: al entregar a los alumnos el material o software seleccionado[20] así como la ficha con la tarea a realizar, es conveniente dejarles unos minutos para que se familiaricen con él[21], esto evitará futuras interrupciones durante el trabajo. Se trata de que disfruten aprendiendo, trabajando conjuntamente la manipulación con la realización de las tareas que se les piden: construir, observar, anotar, dibujar, calcular, sacar conclusiones.

Es interesante pedirles que hagan en casa un pequeño informe-resumen del desarrollo de la práctica en el que constará: caratula, título de la práctica, objetivo, breve marco teórico, procedimiento, cálculos, conclusiones y bibliografía.

En el desarrollo de las guías de prácticas de geometría pretendemos acercarles algunas ideas sobre qué significa “enseñar” geometría utilizando material concreto y el software GeoGebra, con algunas series de secuencias didácticas que brindan algunas orientaciones sobre cómo organizar las prácticas aprovechando la tecnología que poseen los alumnos.

Cabe recalcar que no es un manual de prácticas ni de uso de GeoGebra[22]; simplemente son ideas, propuestas, sugerencias plasmadas en guías de aprendizaje para que se las considere y mejore.

---

[19] Construir figuras, determinar propiedades de los lados, puntos notables, calcular áreas, áreas laterales volúmenes y perímetros.

[20] Software GeoGebra, el cual debe estar instalado previo al desarrollo de la práctica.

[21] Lo toquen, vean cómo funciona, revisen los comandos, hagan construcciones, se la enseñen unos a otros.

[22] Para un mejor acercamiento al programa visitar la pagina http://www.geogebra.org/cms/ o también en http://geonext.uni-bayreuth.de/

El laboratorio de matemáticas es un buen soporte académico que hará posible que los alumnos comprendan que las actividades de enseñanza si se puedan realizar en condiciones significativas y de esta manera ampliar y reforzar los conocimientos adquiridos en clase.

La propuesta de la aplicación de prácticas de laboratorio experimental, pretende que los estudiantes se involucren con mayor interés, compartan las experiencias adquiridas y de esta manera puedan verificar su aplicación por ejemplo de las fórmulas de área del cuadrado, triangulo, rombo trapecio entre otras, así como el cálculo del volumen de una pirámide, de un prisma, de un cubo, esfera, semiesfera y cilindro, la obtención del perímetro, ángulos de figuras regulares en algunos problemas que involucren a figuras combinadas e irregulares. Con la ayuda de esta herramienta metodológica se persigue un cambio de actitud por parte de los estudiantes que utilicen este recurso, que les permita interactuar con su aprendizaje a través del juego, el sonido, el movimiento, la imagen, el trabajo cooperativo y los simuladores.

3.2. Guías de Prácticas

3.2.1. Guía de prácticas 1

3.2.1.1 Ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal

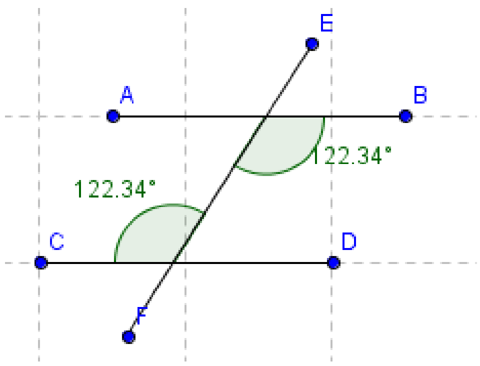
Objetivo: Inferir propiedades de los ángulos y verificar los enunciados utilizando argumentos válidos, emplear GeoGebra para resolver situaciones problemáticas y trabajar en forma cooperativa.

Los estudiantes deben tener conocimientos previos sobre la clasificación de los ángulos comprendidos entre dos paralelas cortados por una transversal. De esta manera, los alumnos estarán en capacidad de identificar cuáles son los ángulos alternos internos y externos, conjugados, correspondientes, opuestos, suplementarios, de un giro.

Se pretende ahora que los alumnos infieran y prueben las propiedades de los ángulos alternos y correspondientes. Para ello, se puede sugerir lo siguiente:

1. Con tu laptop, en GeoGebra, traza dos rectas paralelas cortadas por una transversal, Luego:

2. Ubica un par de ángulos alternos internos, utilizando deslizadores y con la opción homotecia traslada los ángulos.

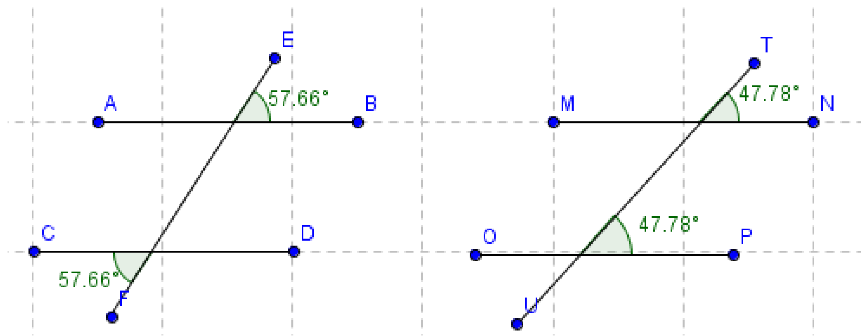


[23]

[23] Esta gráfica y las siguientes, resultado de las practicas experimentales de geometría propuestas en esta tesis, fueron construidas utilizando el software geogebra por el autor.

¿Cómo son entre sí? ¿Qué ocurre si modificas la dirección de la transversal o de las paralelas? ¿Cuándo se les intercambia de posición o se les sobrepone que sucede con la amplitud de los ángulos?

a) Se repite el proceso ubicando un par de ángulos alternos externos y luego un par de ángulos correspondientes.

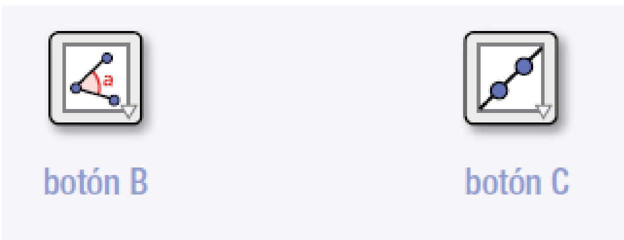


3. Trabajo cooperativo: Una vez finalizada la práctica, resulta oportuno generar una puesta en común en la que los alumnos tengan la necesidad de formular sus inquietudes, conjeturas utilizando un lenguaje matemático apropiado y verificar matemáticamente las propiedades inferidas.

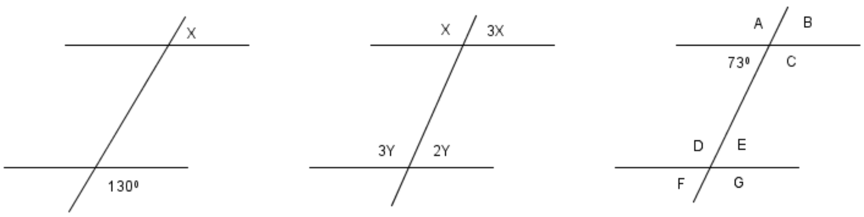
3. Situaciones problemicas:

¿Cómo señalar ángulos?

Se hace clic en el botón B eligiendo la primera opción. Para determinar el ángulo se debe hacer clic en los tres puntos que lo determinan. Hay que tener en cuenta que el orden en que ingresan los puntos determina si el ángulo es cóncavo o convexo. Se observara que no se marcan los lados del ángulo; para ello se deben trazar los segmentos correspondientes mediante la segunda opción del botón C

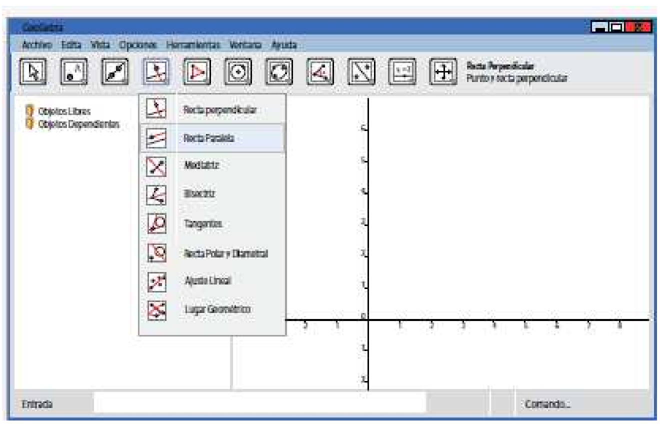


Fuente: Gráfico tomado del programa geogebra.



¿Cómo graficar rectas paralelas?

Se elige la opción **rectas paralelas que pasa por dos puntos**, que se encuentra cuando se despliega la ventana del segundo botón del menú. Una vez graficada la primera recta, para representar una paralela se elige la opción **recta paralela** desde el cuarto botón del menú.



Fuente: Gráfico tomado del software geogebra

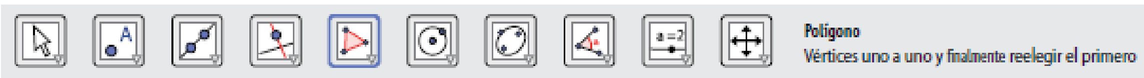
3.2.2. Guía de prácticas 2

3.2.2.1. Suma de los ángulos interiores y exteriores de polígonos

Objetivo: Los alumnos infieren la expresión matemática para el cálculo de la suma de los ángulos interiores, exteriores y numero de diagonales de un polígono y que utilicen el programa GeoGebra para la resolución de situaciones problémicas.

1) Iniciar la práctica planteándonos la siguiente interrogante ¿La suma de los ángulos interiores de los polígonos depende del número de lados? ¿La suma de los ángulos externos de un polígono depende del número de lados?
a) Construir los polígonos en GeoGebra:

En la barra de herramientas nos vamos al quinto icono desde la izquierda, damos un clic y seleccionamos la opción **polígona regular,** marcamos en el plano dos vértices del polígono y se despliega una ventana, en donde escribimos **“4”, “5”, “8”**[24], finalmente clic en **“ok”.**



Fuente: Grafico tomado del programa geogebra

b) Calcular la suma de los ángulos interiores, exteriores y el número de diagonales de cada figura utilizando las herramientas del programa.

c) Por medio del cálculo comprobamos los resultados obtenidos con el software; para ello aplicamos las siguientes expresiones matemáticas:

Numero de diagonales = $\frac{n(n-3)}{2}$

Σ ángulos internos de un polígono regular = $180(n-2)$

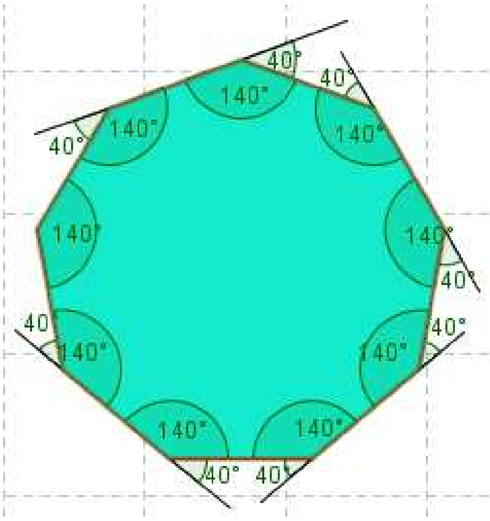
Angulo interno de un polígono regular $= \frac{180(n-2)}{n}$

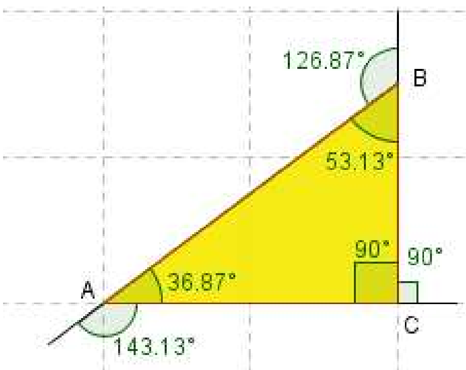
Σ ángulos externos de un polígono = $360°$

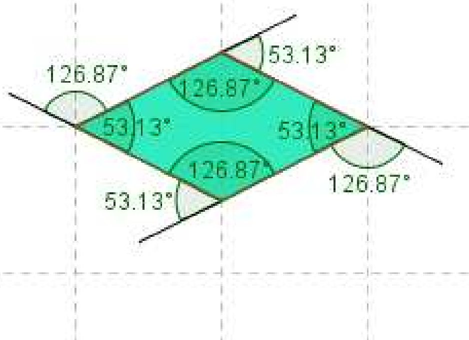
Angulo externo de un polígono $= \frac{360°}{n}$ = ángulo central de un polígono

De las figuras se puede inferir que el ángulo interior y el ángulo exterior son complementarios.

[24] Si pretendemos trabajar con un cuadrado pondremos el número 4 y así sucesivamente







d) A partir de la observación realizada completar el siguiente cuadro.

Polígono	Número de lados	Suma de los ángulos Interiores	Suma de los ángulos exteriores	Valor ángulo interno	Valor ángulo externo	Número de diagonales
Triángulo						
Cuadrilátero						
Pentágono						
Hexágono						
Heptágono						
Octógono						

[25]

[25] Esta tabla y las siguientes, utilizadas en las prácticas experimentales de geometría propuestas en esta tesis fueron realizadas por el autor.

2) Conservando los grupos estructurados al inicio de la práctica, analizar los resultados obtenidos y responder:

¿Qué tienen en común los resultados obtenidos en la segunda columna?

¿Hay alguna forma de predecir cuanto va a ser la suma de los ángulos internos de un dodecágono o un icoságono? Pensar una fórmula que exprese su razonamiento y probar su validez.

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo. El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo llegar a la expresión que nos permite el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono; suma de los ángulos internos = 180(n- 2).

A continuación se puede pedir que los estudiantes expliquen la fórmula obtenida. Se pretende que puedan vincular la cantidad de triángulos que quedan determinados por las diagonales que concurren en uno solo de los vértices de cualquier polígono.

Para que el programa calcule y visualice la suma de los ángulos internos, se debe insertar un texto haciendo clic en el botón deslizador y elegir insertar texto. Se abre una ventana y en ella se debe introducir el siguiente texto [26] "suma de los cinco ángulos =" + ((γ+β+δ+ λ+α)/°.

[26] En este caso para un pentágono

3.2.3. Guía de prácticas 3

3.2.3.1. Ángulos inscritos y semi-inscritos

Objetivo: Inferir las propiedades a través del uso de applets y de GeoGebra; formular propiedades utilizando el lenguaje matemático adecuado y crear situaciones problemáticas y resolverlas.

Los estudiantes pueden buscar en la web, un applet donde se haga referencia a un ángulo inscrito como semi-inscrito a un arco de circunferencia, recomendamos la siguiente dirección:

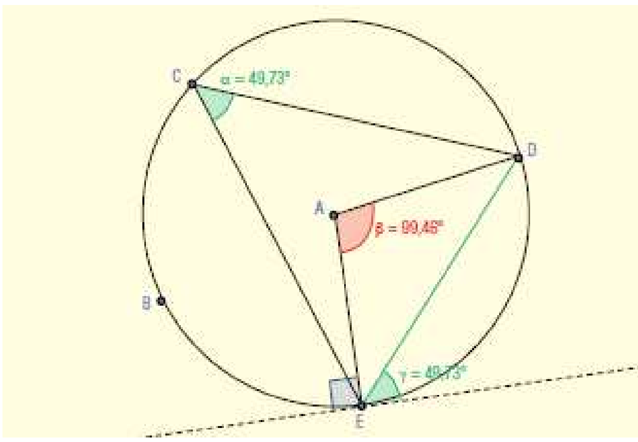
http://www.geogebra.org/en/upload/files/xuxo/geogebra_cobaem/circunferecia-_angulo.html

Cada estudiante en su laptop podría comenzar interactuando, en forma libre con el applet y luego contestar las preguntas que se plantean en la misma pantalla para socializar las respuestas con su grupo de trabajo y cuando los grupos finalicen sería conveniente realizar una puesta en común en la que se logre llegar al enunciado de las propiedades:

“Todo ángulo inscrito en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente” y “Todo ángulo semi-inscrito en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente”.

A continuación, se puede proponer a los alumnos que demuestren la primera propiedad para el caso en que el centro pertenezca a uno de los lados del ángulo inscripto. Para ello los estudiantes valiéndose de GeoGebra pueden realizar una construcción similar a la que presentamos en la gráfica adjunta[27].

Luego:

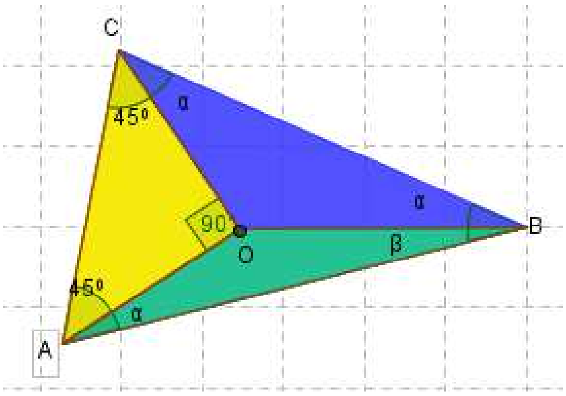


[27] Su construcción y las herramientas de GeoGebra utilizadas se detallan en el CD adjunto a la tesis.

$$\beta = 2\,\alpha \quad \text{y} \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\,\beta$$

En donde inferimos que todo ángulo inscrito o semi-inscrito en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

Como cierre de práctica podemos plantear la siguiente situación problémica. En el interior del triángulo ABC de la figura se ha situado el punto O, el cual se encuentra a la misma distancia de los vértices A, B, C. Se sabe que los segmentos OA y OC son perpendiculares. ¿Calcula la longitud del ángulo CBA?



3.2.4. Guía de prácticas 4

3.2.4.1. Teorema de Pitágoras

Objetivo: El estudiante debe apropiarse del teorema de Pitágoras en donde a partir de una conceptualización gráfica usando GeoGebra, pueda formular conclusiones, validarlas y que sea capaz de investigar y gestionar información relevante sobre el tema.

Si bien en internet encontramos numerosos applets que presentan la demostración gráfica del teorema, nos parece interesante que los estudiantes desde el inicio de la práctica construyan su propia representación gráfica del teorema, para ello sugerimos las siguientes indicaciones.

1. Construyan un triángulo rectángulo. Denoten sus ángulos con las letras A, B y C donde el ángulo C sea de 90º.

Una forma de construir un triángulo rectángulo consiste en trazar primero dos rectas perpendiculares para contar con el ángulo recto. Para ello utilizamos las herramientas: **recta que pasa por dos puntos** y **recta perpendicular**. Luego señalar un tercer punto con la opción **punto nuevo** y con la herramienta **polígono,** unir los tres vértices del triángulo.

Fuente: Grafico tomado del programa geogebra

2. Sobre cada uno de los lados del triángulo construyan un cuadrado.

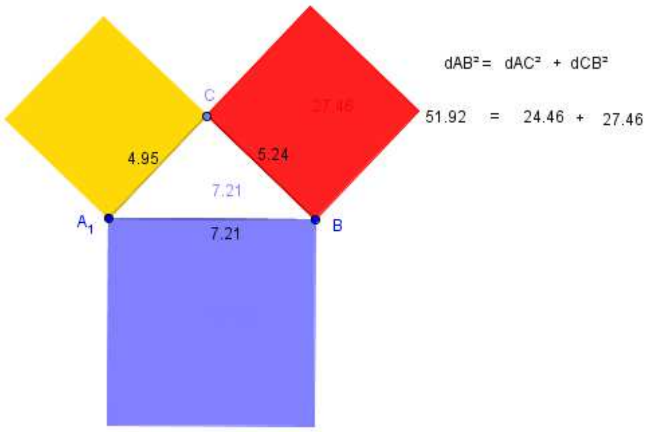
3. ¿Cuál es la longitud de cada lado? Utilicen la herramienta distancia o longitud para indicarlo en la construcción.

4. ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados? Utilicen la herramienta área para indicarlo en la construcción

5. Completen el cuadro adjunto[28].

AB	CA	BC	AB^2	CA^2	BC^2
5	6				
				81	121
		18	169		

5. Analicen la tabla y contesten: ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo?



Una vez realizadas estas actividades, el docente propicia una socialización y puesta en común de los resultados obtenidos y sistematiza el teorema de Pitágoras a partir de lo producido por los estudiantes.

Inmediatamente, nos interesa que los estudiantes se apropien del teorema de Pitágoras a partir de diferentes representaciones gráficas. Por esta razón, ahora si consideramos conveniente proponerles a los estudiantes que exploren diferentes demostraciones gráficas del teorema en internet para ello adjuntamos algunas sugerencias:

Pueden explorar todos los applets que encuentren y seleccionar uno para comprender y entender cómo se realiza la demostración gráfica y explicarlo en forma oral.

Seleccionar un applet y reconstruirlo en GeoGebra.
Como final de la práctica se puede elegir un applet y pedir que se escriba en lenguaje matemático la demostración que se presenta en forma gráfica.
¿Cómo construir un triángulo rectángulo

[28] Los estudiantes deberán mover los vértices del triángulo hasta obtener los valores indicados en la tabla. La construcción de la gráfica del teorema de Pitágoras y otras figuras se presenta en un CD adjunto.

3.2.5. Guía de prácticas 5

3.2.5.1. Propiedades de los ángulos de un triángulo

Objetivo: Demostrar que:

-En todo triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es 180º.

-En todo triángulo, la suma de los tres ángulos exteriores es 360º.

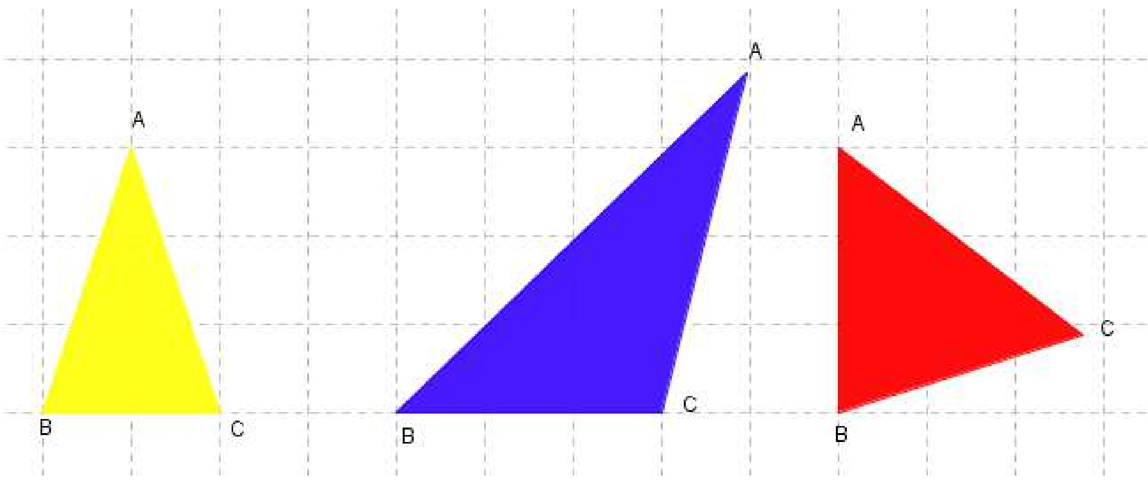
-En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

-Se espera que los estudiantes empleando GeoGebra puedan resolver problemas e inferir propiedades de los ángulos de los triángulos.

El estudiante debe tener como conocimiento previo, el concepto de triángulo, sus elementos, su clasificación según sus lados y ángulos, su construcción en material concreto[29] y GeoGebra.

Como introducción de la práctica, los estudiantes pueden desarrollar utilizando papel milimetrado, escalímetro y transportador de ángulos la siguiente actividad.

1) Dibujar tres triángulos de diferentes formas y dimensiones.



2) Con el transportador medir los ángulos internos y externos de los diferentes triángulos.
3) Realice un análisis de la suma de los ángulos internos y externos respectivamente. ¿Cuál es el valor de la suma? ¿Qué propiedades infiere?

[29] Dibujar en papel milimetrado diferentes triángulos utilizando escalímetro y transportador de ángulos

4) Complete las siguientes tablas.

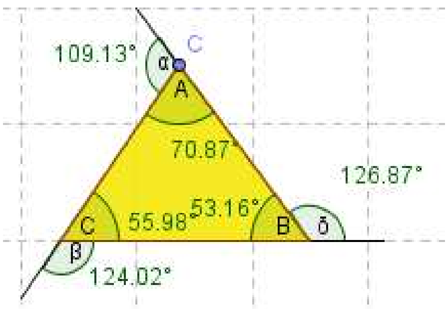
	A	B	C	Suma
Triángulo 1				
Triángulo 2				
Triángulo 3				

	γ	α	β	Suma
Triángulo 1				
Triángulo 2				
Triángulo 3				

A continuación utilizando GeoGebra sugerimos realizar las siguientes actividades[30]:

1) Construir un triángulo cualquiera y designar sus ángulos internos con las letras A, B y C.

2) Designar sus ángulos exteriores con las letras δ, α y β.



3) Analicen los valores de los ángulos internos y externos de los diferentes triángulos y estimen ¿Cuál es el valor de la suma?

4) Completen la siguiente tabla e indiquen alguna observancia entre las medidas de los ángulos de los diferentes triángulos

	A	B	C	Suma	γ	α	β	Suma
Triángulo 1								
Triángulo 2								
Triángulo 3								

[30] Estas actividades están desarrolladas en detalle en el CD adjunto

Si la tabla anterior les presenta inconvenientes para demostrar la propiedad de que cada ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes, les sugerimos las siguientes tablas.

	γ	A	B	A + B
Triángulo 1				
Triángulo 2				
Triángulo 3				

Y si el docente lo considera conveniente se puede construir dos tablas similares, una donde estén involucrados los ángulos internos A, B y el ángulo externo β, y otra donde estén los ángulos internos A, C y el ángulo externo α.

	β	B	C	B + C
Triangulo 1				
Triangulo 2				
Triangulo 3				

	α	A	C	A+ C
Triangulo 1				
Triangulo 2				
Triangulo 3				

Para el cierre de la práctica sugerimos al docente socializar los razonamientos a los que llegaron los estudiantes y que enuncien correctamente las propiedades analizadas.

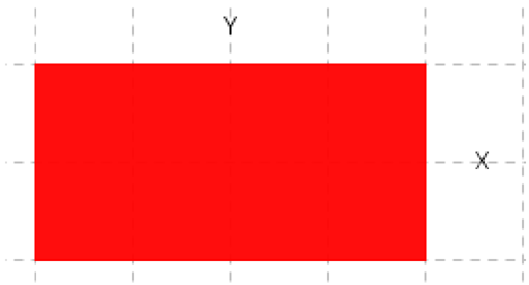
3.2.6. Guía de prácticas 6

3.2.6.1. Área del rectángulo

Objetivo: Expresar el área total de un rectángulo dividida por un hilo en función de la longitud de uno de sus lados.

Antes de iniciar la práctica debemos considerar que si **x** y **y** son los lados de un rectángulo, su área vendría representada por:

A = x . y



a) Utilizando láminas forma de colores, trazamos, medimos con el escalímetro y recortamos con las tijeras dos rectángulos iguales con diferentes divisiones.

b) Empleando piola y alfileres, dividimos cada rectángulo como indican las figuras A_1 y A_2.

Figura A_1

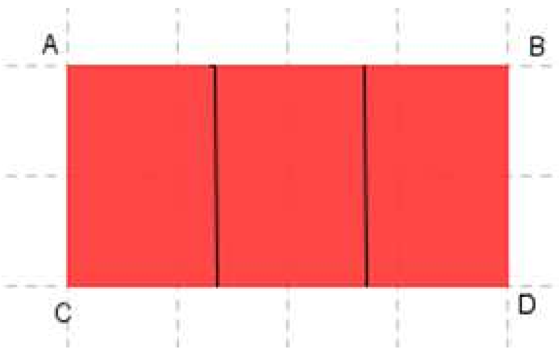
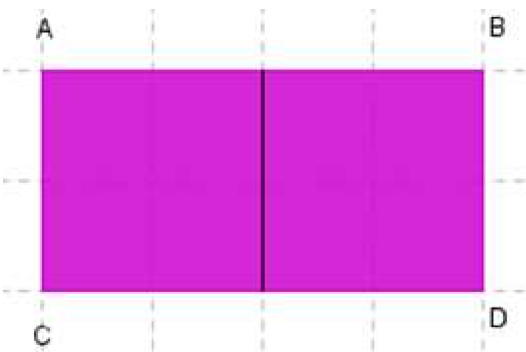


Figura A_2



b) Determinamos el perímetro **P** en la figura A_2, para ello medimos la piola que cerca los lados y las divisiones al interior del rectángulo.

Obtenemos la siguiente expresión:

$$3x + 2y = P$$

Despejamos **y** $\qquad y = \frac{P-3x}{2} \qquad (1)$

c) Calculamos el área de la figura A_1 en función de uno de sus lados:

d)

$$\text{Área} = A(x) = x.\, y \qquad (2)$$

Entonces, Sustituyendo (1) en (2) nos queda:

$$A = x\,(\left(\frac{P-3x}{2}\right) = \frac{Px}{2} - \frac{3x}{2} \qquad (3)$$

En la práctica el valor de **P** se determina midiendo la piola utilizada en cada figura, que para el caso A_2 resulto ser: P= 24 cm.

Por consiguiente, reemplazando el valor de **P** en la ecuación tenemos el área de un rectángulo en función del lado x

$$A(x) = 12x - \frac{3x^2}{2}$$

e) Determinamos el dominio: La imagen de la función se debe restringir a valores positivos a fin de que sea razonable la interpretación del área. Entonces el dominio de la función está dado por los valores de **x** que satisfacen la desigualdad:

$$12x - \frac{3x^2}{2} > 0$$

Es decir $\qquad 24x - 3x^2 > 0$

$$3x\,(8 - x) > 0$$

$$0 < X < 8$$

f) Proponer a los estudiantes que determinen el área en función del otro lado es decir:

$$3x + 2y = P$$

$$X = \frac{P-2y}{3}$$

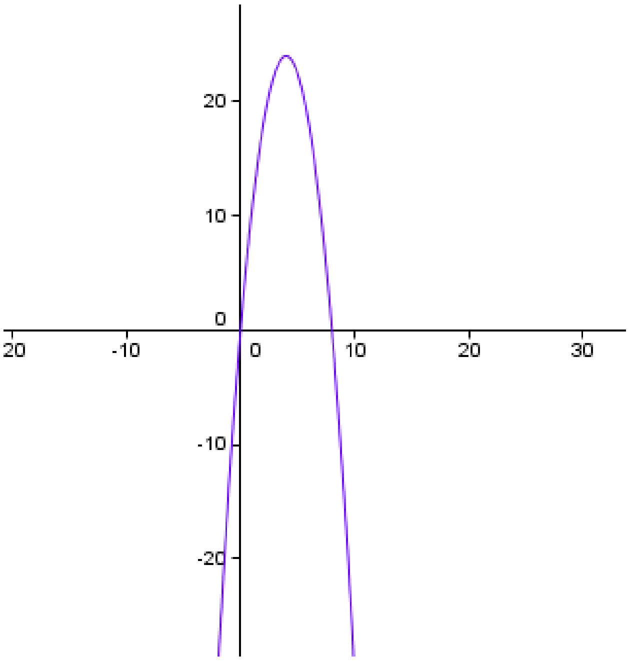
$$A = y\left(\frac{P-2y}{3}\right)$$

g) Construimos una tabla de valores y su correspondiente gráfico para la función.

$$A(x) = 12x - \frac{3x^2}{2}$$

x	1	2	3	4	5	6	7
A(x)	21/2	18	45/2	24	45/2	18	21/2

h) Realizamos la gráfica en papel milimetrado formato A-4. Si utilizamos GeoGebra, usamos la barra de entrada que se encuentra ubicada en la parte inferior de la pantalla, en donde escribimos la función $12x - \frac{3x^2}{2}$ y damos un clic en **enter.**



i) Proponer a los estudiantes que determinen el área en función del otro lado es decir:

$$3x + 2y = P$$

$$X = \frac{P-2y}{3}$$

$$A = y\left(\frac{P-2y}{3}\right)$$

j) Se sugiere pedir a los grupos que trabajando de forma similar calculen el área en función de uno de los lados en la figura A_1.

Como paso previo, para concluir la práctica se recomienda realizar una puesta en común en donde los estudiantes logren discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo.

3.2.7. Guía de prácticas 7

3.2.7.1. Área del cuadrado

Objetivo: Expresar la suma de las áreas de dos cuadrados, en función del lado del cuadrado mayor y en función del lado del cuadrado menor.

a) Utilizando material concreto, cortar un trozo de alambre maleable de longitud **L** en dos partes desiguales de longitud $L_x < L_y$

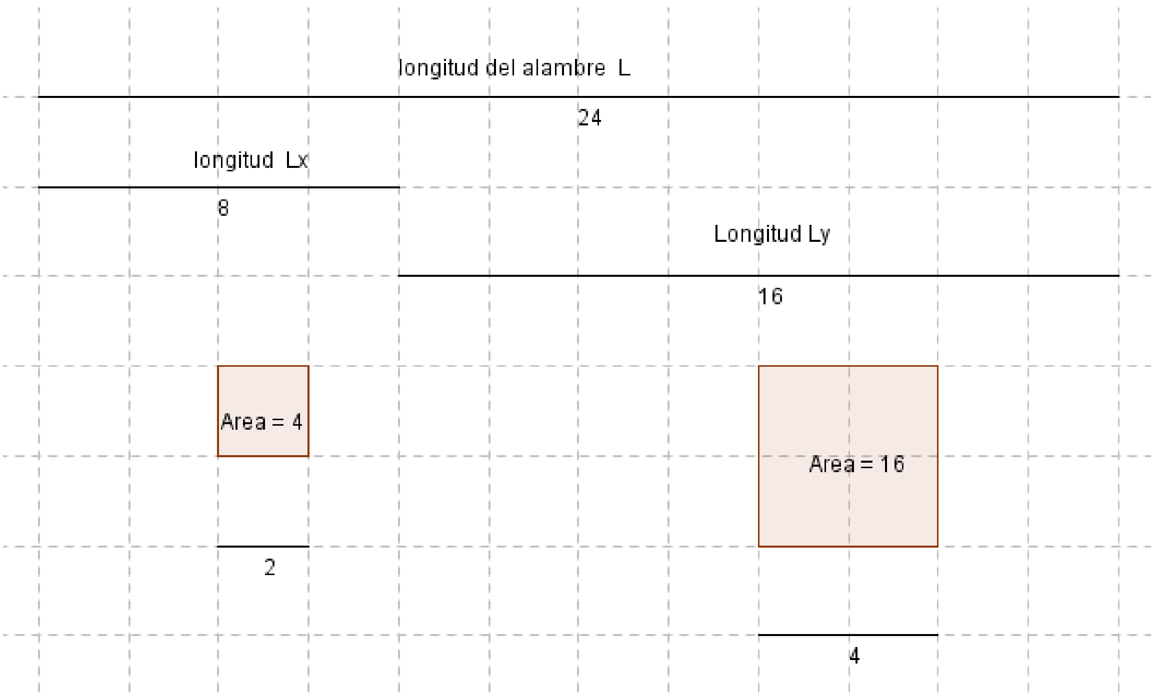
b) Construir con L_x un cuadrado.

c) Construir con L_y un cuadrado.

d) Determinamos la suma de las áreas de los cuadrados en función de uno de sus lados.

Sean L_x y L_y las longitudes de los lados del cuadrado menor y del cuadrado mayor respectivamente.

Considerando que el lado del cuadrado pequeño es **x** y **y** del cuadrado grande tenemos:



Que la suma de las áreas de los cuadrados es:

$$A = x^2 + y^2 \quad (1)$$

e) Si designamos por **L** a la longitud del alambre[31] con el que se construyeron los cuadrados entonces:

Perímetro = L

Sea L = 4x + 4y

Luego $Y = \frac{L}{4} - x$ (2)

f) Sustituyendo (2) en (1) obtenemos que la expresión del área, en función del lado del cuadrado pequeño es:

$$A(x) = x^2 + \left(\frac{L}{4} - x\right)^2$$

g) Determinamos el dominio, para ello la imagen de la función se debe restringir a valores positivos a fin de que sea razonable la interpretación del área. Entonces el dominio de la función está dado por los valores de x ≥0 y y ≥0.

h) Construimos una tabla de valores utilizando la ecuación $x^2 + \left(\frac{L}{4} - x\right)^2$ con L =24 tenemos:

$$x^2 + \left(\frac{24}{4} - x\right)^2$$

Que nos da $x^2 + 36 - 12x + x^2$

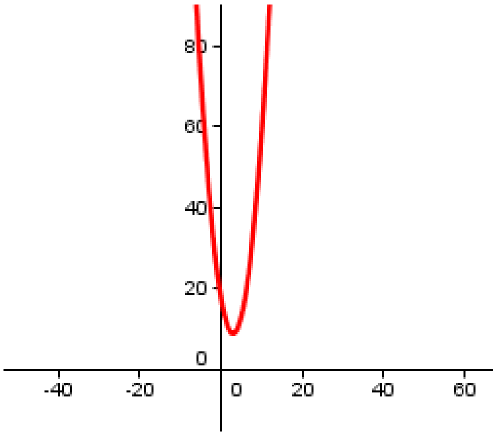
De donde $2x^2 - 12x + 36$

Luego $A(x) = x^2 - 6x + 18$

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3
A(x)	18	13	10	9	10	13	25	34	45

i) Construimos la gráfica en papel milimetrado formato A-4. Si utilizamos GeoGebra introducimos la ecuación $x^2 - 6x + 18$ en la barra de entrada luego clic en enter y se nos despliega la siguiente gráfica:

[31] En la práctica que realizamos L = 24cm; por lo que se sugiere al docente en una nueva practica utilizar este valor u otro que sea divisible para 4



Como retroalimentación proponer a los grupos de trabajo obtener la expresión matemática que nos determine la suma de las áreas de dos cuadrados en función del lado mayor, pero utilizando GeoGebra, para ello pulsamos en la opción tres desde la izquierda seleccionamos **segmento entre dos puntos,** formamos la recta AB[32].Damos un clic en la opción cinco, seleccionamos el comando **polígono regular**, y construimos dos cuadrados de longitud Lx y Ly. Abrimos el menú del icono ocho desde la izquierda, seleccionamos la opción **distancia y longitud,** nos ubicamos en el lado de la figura a medir y damos un clic, procedemos de la misma forma para determinar el **área** y el **perímetro** para luego ubicarme en la. Con los datos obtenidos deducimos una fórmula para el cálculo del área en función de Ly.

Como antesala a la culminación de la práctica sugerimos al docente realizar una puesta en común, en donde los estudiantes consigan discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo, optimizando sus aprendizajes.

[32] Que será el perímetro de los dos cuadrados

3.2.8. Guía de prácticas 8

3.2.8.1. Área del triángulo

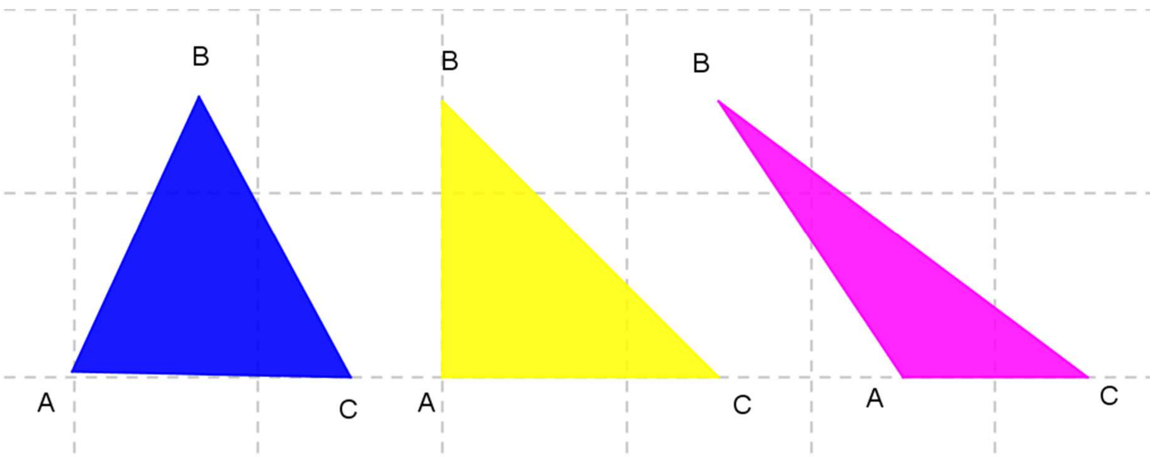
Objetivos: Determinar el área de un triángulo conocido:

- Sus tres lados
- Dos lados y el ángulo comprendido
- Dos ángulos y un lado
- Su base y su altura

a) Utilizando material concreto construir en láminas foamy tres triángulos de lados y ángulos diferentes cada uno con vértices A, B y C.

b) Con el transportador de ángulos, medir cada ángulo del triángulo T_1 **n** veces y obtener la media aritmética.

c) Con el escalímetro, medir cada lado del triángulo T_1 n veces y obtener la media aritmética.



d) Calcular el semi perímetro con la expresión:

$$S = \frac{a+b+C}{2}$$

e) Aplicar la fórmula de Herón para el cálculo del área:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

f) Repetir el procedimiento en los triángulos T2 y T3.

g) Completar la siguiente tabla 1.

	a	b	c	S	A
Triángulo 1					
Triángulo 2					
Triángulo 3					

Para el cálculo del área conocidos dos lados y el ángulo comprendido, utilizando las expresiones a.bSenC; a.cSenB y b.cSenA y con los mismos datos obtenidos previamente para el T1, T2 y T3 completamos la siguiente tabla 2.

	a	b	c	A	B	C	abSenC	acSenB	bcSenA
Triángulo 1									
Triángulo 2									
Triángulo 3									

Cuando conocemos los dos ángulos, por ejemplo A y B y un lado b.

Lo primero que calculamos es C = 180 – (A + B).

Luego aplicamos la ley de los senos.

$$a = \frac{c\ Sen\ A}{Sen\ C}$$

Y determinamos el área con la expresión:

Área = a.b Sen C

Por último, podemos calcular el área de un triángulo cuando se conoce su base y su altura, datos que previamente se pueden obtener aplicando Pitágoras, funciones trigonométricas o la ley de los senos según sea el caso.

$$A = \frac{base\ x\ altura}{2}$$

Trabajo cooperativo: Una vez finalizada la práctica, resulta oportuno generar una puesta en común en la que los alumnos tengan la necesidad de formular sus inquietudes, utilizando un lenguaje matemático apropiado y verificar matemáticamente las distintas áreas calculadas con diferentes fórmulas, comparar los resultados de las áreas obtenidas en la tabla 1 con los obtenidos en tabla 2, ¿A qué conjeturas llega? ¿Qué formula nos da el cálculo más exacto del área de un triángulo? ¿Cuál se aproxima más?

Finalmente como cierre de práctica se puede sugerir a los alumnos que utilizando las herramientas que GeoGebra nos facilita, determinar el valor de los lados, ángulos y áreas de los triángulos T1, T2 y T3 y comparar con los resultados obtenidos en las tablas 1 y 2. ¿Cuál es la conclusión final? ¿Cuál es el margen de error aproximado entre los cálculos obtenidos con material concreto y los obtenidos con el software GeoGebra?

2. ¿Cuál es la conclusión final? ¿Cuál es el margen de error aproximado entre los cálculos obtenidos con material concreto y los obtenidos con el software GeoGebra?

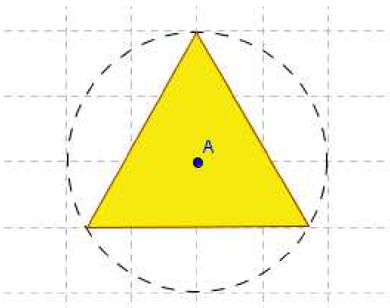
3.2.9. Guía de prácticas 9

3.2.9.1. Calculo de áreas y perímetros utilizando doblez de papel

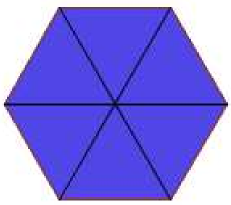
Objetivo: Determinar ángulos, perímetros y áreas de figuras geométricas como el triángulo, trapecio, rombo, hexágono y circunferencia utilizando el doblez de papel y GeoGebra.

a) Utilizando una hoja de papel milimetrado formato A-4, trazamos y recortamos una circunferencia de radio r.

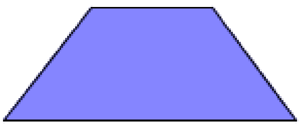
b) Realizamos un primer doblez, hacemos coincidir los bordes de la circunferencia con su centro, formándose un triángulo equilátero.



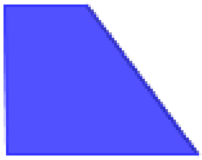
c) Proseguimos con un segundo doblez, esta vez hacemos coincidir los vértices del triángulo con el centro de la circunferencia, obteniendo un hexágono regular con 6 triángulos equiláteros inscritos.



d) Efectuamos un tercer doblez, dividimos al hexágono en dos partes iguales con lo que obtenemos un trapecio o un rombo, según el doblez que realicemos.



e) Generamos un cuarto doblez, con lo que obtenemos un trapecio rectángulo.



f) En todas y cada una de las figuras obtenidas con el doblez del papel, determinamos el valor de los lados, alturas con el escalímetro y el de los ángulos con el transportador y completamos la siguiente tabla:

Figura	Lado	Angulo	Apotema	Perímetro	Área
Triángulo 	AB= AC= CB=	A= B= C=			
Hexágono 	AB= BC= CD= DE= EF= FA=	A= B= C= D= E= F=			
Rombo 	AB= BC= CD= AD=	A= B= C= D=			
Trapecio 	AB= BC= CD= DA=	A= B= C= D=			
Trapecio rectangular 	AB= BC= CD= DA=	A= B= C= D=			
Círculo 	Radio=				

Recomendamos como cierre de práctica que el docente proceda con una puesta en común en donde los grupos socialicen, se disipen dudas, se planteen inquietudes, como por ejemplo ¿Qué valor corresponde a la suma de los ángulos internos de un triángulo, de un hexágono, de un trapecio? ¿Qué opina del uso pedagógico de la Geometría de papel?

3.2.10. Guía de prácticas 10

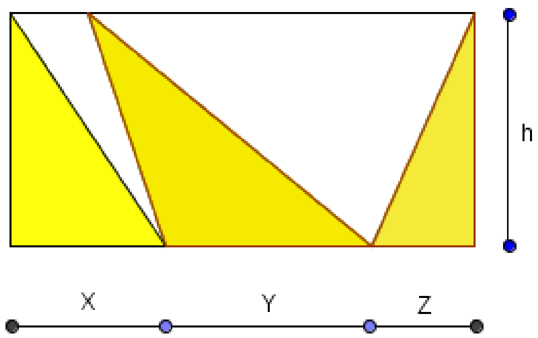
3.2.10.1. Cálculo de Áreas

Objetivo: Determinar el área sombreada en el cuadrilátero A BCD, por medio del cálculo matemático en base al uso de expresiones geométricas y utilizando software.

a) Utilizando GeoGebra construimos el cuadrilátero ABCD, pulsando el quinto icono desde la izquierda ejecutamos el comando **Polígono**, construimos rectángulo ABCD. luego ubicándome en la segunda y tercera herramienta, selecciono **nuevo punto** y **segmento entre dos puntos** divido al cuadrilátero en cinco áreas de las cuales sombreo tres, seguidamente doy clic derecho y me ubico en **propiedades del objeto, color estilo,** y sombreo el área que deseo calcular. Eligiendo la herramienta **área** determinamos el área de cada figura sombreada. Posteriormente si queremos cambiar las condiciones de la gráfica así construida, podemos arrastrar la figura y variar sus dimensiones, obteniendo diferentes áreas sombreadas.

En este tipo de prácticas donde el estudiante tiene que recurrir a algún conocimiento anterior para realizar un cálculo, un análisis, un esquema de la situación planteada con vistas a encontrar una idea para la solución del problema es primordial realizar una buena gráfica y tener un conocimiento de las matemáticas a utilizar.

b) Comprobamos que el área sombreada obtenida por medio del software es semejante al área calculada por medio de ecuaciones lineales.



h= altura

b= x + y+ z

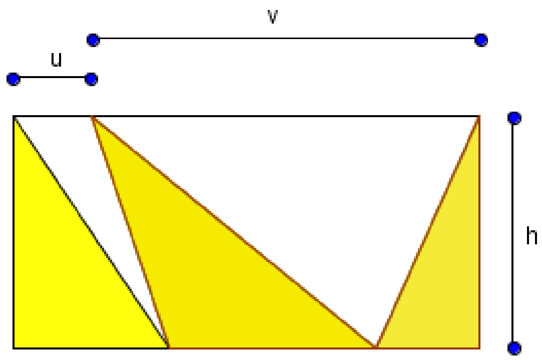
$Area_{sombreada}$= A$\triangle$1 + A$\triangle$ 2 + A$\triangle$ 3

$$= \frac{X\,.\,h}{2} + \frac{y\,.\,h}{2} + \frac{Z\,.\,h}{2}$$

$$= \frac{h}{2}[x + y + z\,]$$

Como b = x +y +z = 0,5h. b

c) Calculamos el área sin sombrear utilizando GeoGebra y comparamos los datos obtenidos aplicando ecuaciones lineales.



$$A_{\sin sombrear} = \frac{h\,.\,u}{2} + \frac{h\,.\,v}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(\,u + v)$$

=0,5 h.b

Comprobación:

$$Area_{\sin sombrear} \quad = A\,\blacksquare \quad -A_{sombreada}$$

=b .h – 0,5 b.h

= 0,5 h. b

Se sugiere que el momento de realizar la práctica en lugar de utilizar letras en las expresiones utilizadas, emplear números, esto nos va a dar una mejor interpretación del cálculo.

Comparamos los valores del área sombreada y sin sombrear obtenidos con GeoGebra y los obtenidos por medio del cálculo.

Trabajo cooperativo: Una vez finalizada la práctica, resulta oportuno generar una puesta en común en la que los alumnos tengan la necesidad de formular sus inquietudes, conjeturas utilizando un lenguaje matemático apropiado y verificar matemáticamente las propiedades inferidas.

¿Cuál es la conclusión final? ¿Cuál es el margen de error aproximado entre los cálculos obtenidos con ecuaciones y los obtenidos con el software?

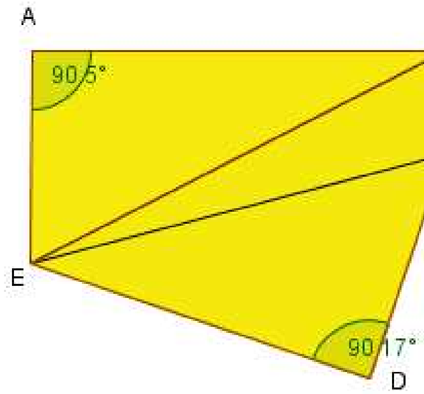
3.2.11. Guía de Práctica 11

3.2.11.1. Área de figuras planas irregulares

Objetivo: Determinar el área de figuras planas irregulares por medio de la división y cálculo de áreas de figuras planas conocidas.

a) Utilizando material concreto foamy, regla, transportador de ángulos, escalímetro construimos la siguiente figura plana irregular.

b) Para calcular el área de una figura no regular aplicamos la triangulación.



c) Medimos con el escalímetro las longitudes de los lados AB, BC, CD, DE, EC y EA unas tres veces, para luego sacar la media aritmética de cada uno. Calculamos el semi perímetro **s** del triángulo BCE.

d) Determinamos el área total de la figura ABCDE a partir de la suma de las áreas de los triángulos. ▲ ABE, ▲BCE, y ▲ CED

$$Area_{total} = \text{A}\blacktriangle\text{ABE} + \text{A}\blacktriangle\text{BCE} + \text{A}\blacktriangle\text{CED}$$

$$= \frac{AB.AE}{2} + \frac{EC.BC}{2} + \sqrt{s(s-BC)(s-BE)(s-CE)}$$

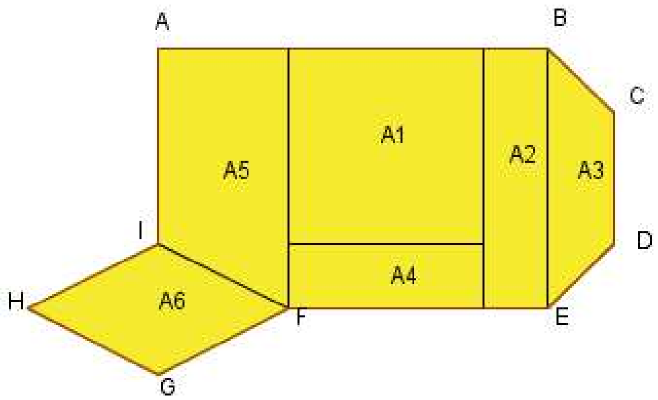
e) Sustituimos los valores de las áreas de los triángulos ABE, BCE y CED en la expresión $Area_{total}$.

f) Utilizando las herramientas que el GeoGebra nos ofrece construimos una figura idéntica, con los mismos valores tanto de los lados como de los ángulos y calculamos el área. Para ello iniciamos pulsando la opción dos desde la izquierda damos clic en **punto nuevo** y señalamos cinco puntos que luego unimos seleccionando la herramienta **polígono,** seguidamente dividimos el polígono empleando el comando **segmento entre dos puntos** y finalmente ubicándonos en el icono ocho damos clic en **distancia** y posteriormente en **área** marcando previamente lo que queremos determinar.

g) Comparamos los valores del área total, obtenidos con material concreto y con GeoGebra.

Procedemos de manera similar con el cálculo del área total de la figura plana irregular ABCDEFGHI:

a) Dividimos el polígono en figuras geométricas conocidas,[33]tratando en lo posible de incluir algunas con las que no hayamos practicado, utilizando ahora para la primera parte de la práctica como material concreto láminas de papel milimetrado formato A-4 en donde vamos a plasmar las figuras a escala.



b) Con los datos de los lados medidos calculamos el área total de la figura ABCDEFGHI a partir de la suma del área de figuras conocidas.

$$A_{total} = \mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \mathrm{A3} + \mathrm{A4} + \mathrm{A5} + \mathrm{A6}$$

$$= L^2 + \left(\frac{B+b}{2}\right) h + \left(\frac{B+b}{2}\right) h + \left(\frac{B+b}{2}\right) h + b \,.\, h + \left(\frac{B+b}{2}\right) h + \frac{D+d}{2}$$

c) Sustituimos los valores obtenidos en la práctica, en la expresión $Area_{Total}$.

d) Utilizando las herramientas que el GeoGebra nos ofrece construimos una figura idéntica, con los mismos valores tanto de los lados como de los ángulos y calculamos el área. Las herramientas tanto para la construcción del polígono como de las figuras interiores son las mismas que hemos venido usando por lo que no hace falta especificaciones.

[33] Como el trapecio, rectángulo, cuadrado, triangulo. rombo

e) Comparamos los valores del área total, obtenidos con material concreto y con GeoGebra.

f) Trabajo cooperativo: Una vez finalizada la práctica, resulta oportuno generar una puesta en común en la que los alumnos tengan la necesidad de formular sus inquietudes, conjeturas utilizando un lenguaje matemático apropiado y verificar matemáticamente las propiedades inferidas.

¿Cuál es la conclusión final? ¿Cuál es el margen de error aproximado entre los cálculos obtenidos con material concreto y los obtenidos con software?

El docente puede sugerir como cierre de práctica que los alumnos con los mismos grupos calculen el área total de las mismas figuras utilizadas en la práctica; pero realizando otras divisiones.

3.2.12. Guía de Prácticas 12

3.2.12.1. Calculo de áreas 01

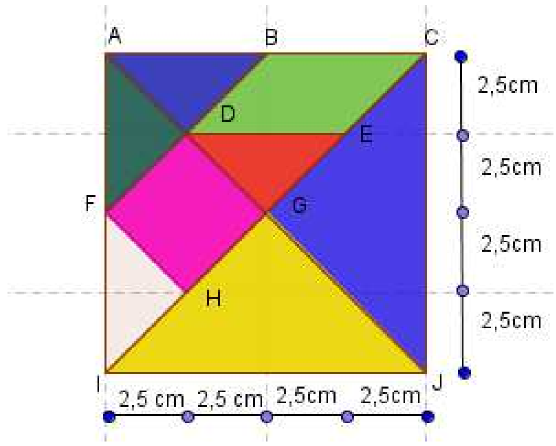
Objetivo: Construir un tangram utilizando material concreto y el software matemático GeoGebra.

Determinar el área total, a partir del cálculo de la suma de áreas parciales de figuras conocidas que conforman el tangram.

a) Utilizando material concreto foamy de colores[34] construimos un tangram de 10 x 10 con las dimensiones que se especifican en el esquema.

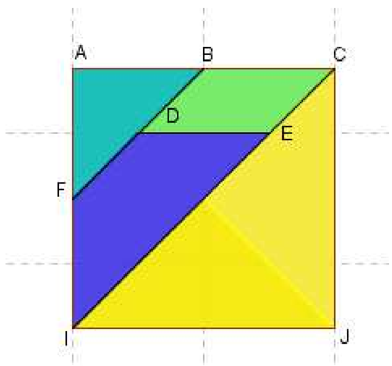
b) Recortamos las figuras con las dimensiones preestablecidas.

c) Medimos[35] con el escalímetro cada uno de los lados de las figuras que conforman el tangram.



d) Calculamos el área total del tangram a partir de la suma del área de las figuras que lo conforman. Para ello realizamos cuatro divisiones diferentes.

Caso A



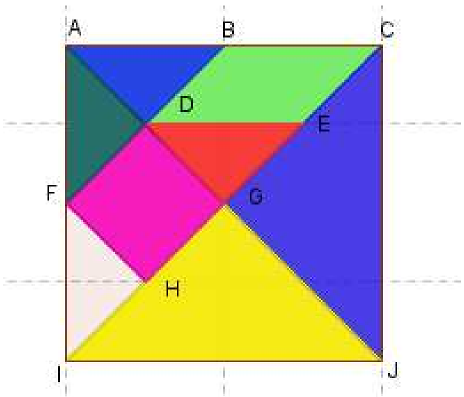
[34] Cada figura del tangram tiene que tener en lo posible un color diferente.
[35] Medir por lo menos tres veces cada lado y luego sacar la media aritmética

$$At = A\triangle ABF + A\square DEFI + A▱ BCDE + A\triangle CIJ$$

$$= \frac{AB.FA}{2} + \left(\frac{IE.FD}{2}\right) DG + DE.EC + \frac{IJ.CJ}{2}$$

Caso B

Se sugiere proponer esta nueva división del tangram para determinar el área total en donde van a estar involucradas nuevas figuras, y por lo tanto otras expresiones que nos permitirán el cálculo del área total.



$$A_t = A\triangle ABF + A\triangle DEG + A\triangle FHI + A\triangle IGJ + A\triangle CGJ + A\square DFGH + A▱ BCDE$$

$$A_{total} = \frac{AB\ .\ AF}{2} + \frac{GE\ .\ DG}{2} + \frac{IH\ .\ GH}{2} + \frac{IG\ .\ GJ}{2} + \frac{GJ\ .\ GC}{2} + (HG)^2 + DE.EC$$

A continuación el docente puede proponer dos divisiones diferentes, para que los estudiantes tengan un marco más amplio para analizar el uso y aplicaciones del tangram.

a) Para culminar la práctica se puede pedir que aprovechando las bondades que el GeoGebra nos presenta, construir un tangram igual y de similares dimensiones al realizado con material concreto. Para ello iniciamos con la pantalla cuadriculada pulsando la opción dos desde la izquierda damos clic en **punto nuevo** y señalamos los puntos de intersección de todas las figuras que dan forma al tangram, luego unimos los puntos seleccionando la herramienta **polígono,** seguidamente empleando el comando **segmento entre dos puntos** damos forma a las figuras interiores. Antes de dar **color** a las figuras es fundamental primero **insertar texto** entrando en la opción diez desde la izquierda y finalmente ubicándonos en el icono ocho damos clic en

distancia y posteriormente en **área** marcando previamente lo que queremos determinar.

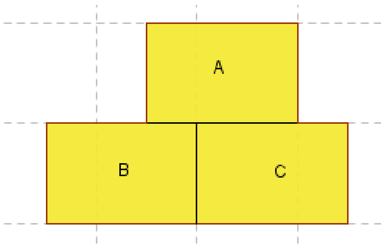
Finalmente el docente puede proponer una puesta en común en donde se discutan las diferentes formas de determinar el área total, comparar los valores obtenidos con material concreto y con software. ¿Cuál es la manera más práctica y rápida? ¿Cuál es la más exacta y aplicable? ¿Qué relación existe entre ellas?

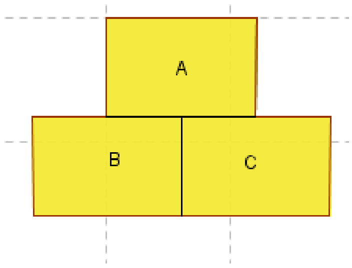
3.2.13. Guía Práctica 13

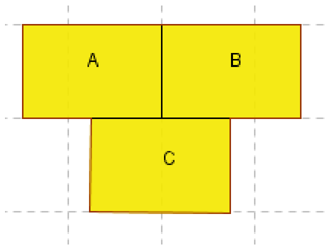
3.2.13.1. Perímetros de rectángulos agrupados

Objetivo: Determinar el perímetro de los rectángulos agrupados A, B y C en diferentes posiciones.

a) Utilizando GeoGebra construimos las siguientes gráficas.



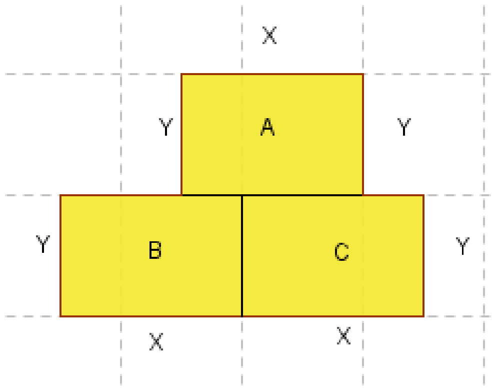




b) Designamos el valor de la base = **x** y de la altura = **y**.

c) Pulsamos la opción dos desde la izquierda, seleccionamos **nuevo punto** y señalamos los vértices de los rectángulos, luego dando clic en el comando cinco seleccionamos **polígono** y unimos los puntos, dando como resultado el contorno de las tres figuras unidas. Posteriormente con la herramienta **distancia** vamos determinando la longitud de cada lado, obteniendo por medio del software el valor del perímetro de las figuras agrupadas 1, 2 y 3.

d) Como método comprobatorio calculamos el valor del perímetro de las figuras agrupadas 1 aplicando ecuaciones lineales:



P_{total} = P A + P (B+C)

Considerando al lado horizontal de cada rectángulo con la letra **x** y al lado vertical con la letra **y** tenemos:

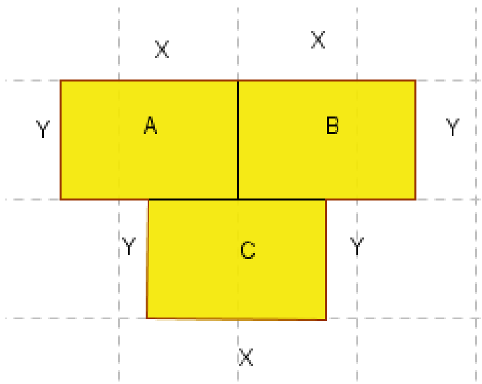
= (2y + x) + (2x – x +2y + 2x)

= (2y + x) + (3x + 2y)

= 2y + x +3x + 2y

= 4x + 4y

e) Calculamos el valor del perímetro de las figuras agrupadas 2 aplicando ecuaciones lineales:



P_{total}= P (A + B) + P C

= (2x + 2y + 2x – x) + (2y + X)

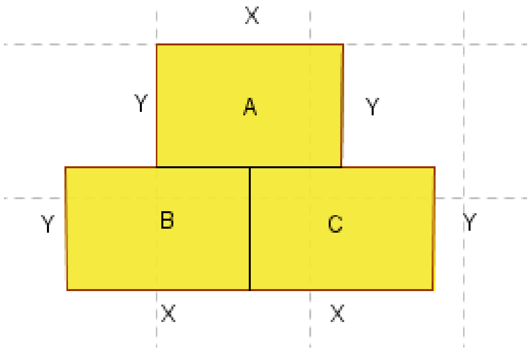
= (3x +2y) + (2y + x)

= (3x +2y) + (2y + x)

= 2y+ x + 3x + 2y

= 4x + 4y

f) Calculamos el valor del perímetro de las figuras agrupadas 3 aplicando ecuaciones lineales:



P_{total}= P A + P (B+C)

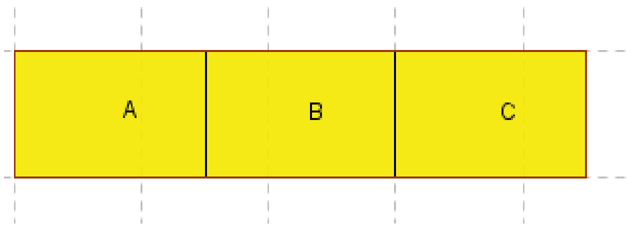
= (2y + x) + (2x – x + 2y +3x)

= (2y+ x) + (3x + 2y)

= 2y + x + 3x + 2y

= 4x + 4y

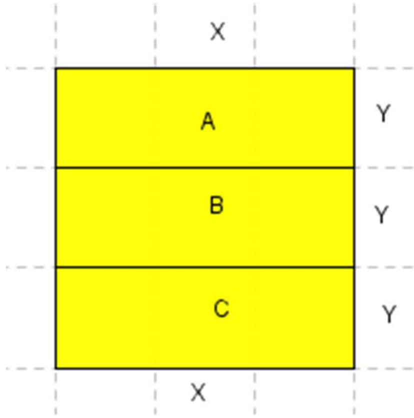
A continuación se propone a los grupos el cálculo del perímetro de dos nuevas distribuciones de los rectángulos.



P_{total}= P A + P B + P C

= (2x + y) + (2x) + (2x +y)

= 6x + 2y



$$P_{total} = P_{\square}A + P_{\square}B + P_{\square}C$$

$$= (2y + x) + (2y) + (2y + x)$$

$$= 2x + 6y$$

Finalmente el docente puede proponer una puesta en común en donde se discutan las diferentes valores el perímetro total obtenidos. ¿Porque el perímetro total de figuras agrupadas depende de la posición de las figuras? ¿Cuál es el margen de error, entre el perímetro calculado utilizando ecuaciones y el determinado por GeoGebra? Pedir que se explique con un lenguaje matemático apropiado.

3.2.14. Guía de prácticas 14

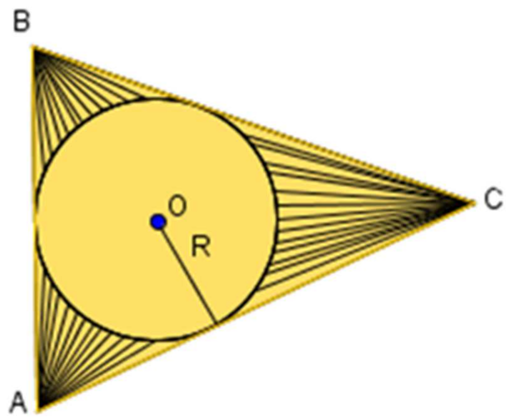
3.2.14.1. Cálculo de áreas 02

Objetivo: Determinar el área sombreada que se forma entre la intersección de un círculo y un triángulo circunscrito a este.

a) Utilizando material concreto, dibujamos en una lámina foamy un circulo de radio **r,** lo recortamos y pegamos en la siguiente lámina.

b) En otra lámina dibujamos nuevamente un círculo de radio r y trazamos tres tangentes al mismo, de modo que se forme un triángulo de vértices A, B, C.

c) Recortamos la figura:



d) Con un escalímetro medimos tres veces cada lado del triángulo y el diámetro del círculo y calculamos la media aritmética.

e) Con los datos obtenidos, calculamos el área del círculo y del triángulo aplicando la fórmula de Herón.

$$A_{circulo} = \pi r^2 = \pi \ \frac{d^2}{4}$$

$$A_{triangulo} = \sqrt{s(s-C)(s-B)(s-A)}$$

$A_{sombreada}$ = Área de intersección entre el ▲ y el ⬬

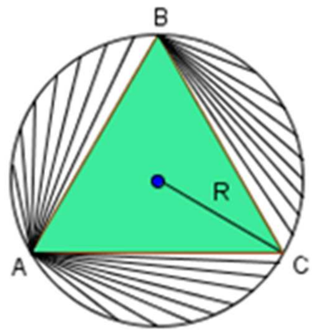
= A▲ - A⬬

$= \sqrt{s(s-C)(\ s-B)(\ s-A)}\ \ -\ \pi\ \frac{d^2}{4}$

g) Utilizando el software GeoGebra construimos una figura de similares condiciones a la elaborada con material concreto y determinamos el área sombreada. Para ello nos ubicamos en la barra de herramientas, selecciono el sexto icono desde la izquierda se despliega un menú, damos clic en **circunferencia, dado su centro y radio,** se abre una ventana donde colocamos la longitud del radio a discreción y **ok**, luego nos trasladamos al cuarto comando y seleccionamos **tangentes**, trazando las tangentes al círculo, como siguiente paso nos vamos al tercer icono ejecutamos la opción **segmento entre dos puntos** cerramos el triángulo y rayamos la parte sombreada. Por último, dando clic en el icono ocho desde la izquierda, optamos por la opción **área** y determinamos el área tanto del círculo como del triángulo.

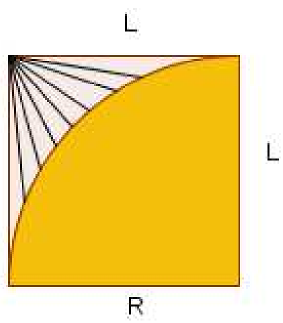
Se sugiere repetir la práctica para los siguientes casos:

Caso en que el triángulo esté inscrito al círculo.



Área (sombreada) = $\pi\ \frac{d^2}{4} - \sqrt{s(s-C)(\ s-B)(\ s-A)}$

Caso en el que la parte sombreada es la diferencia entre el área del cuadrado ABCD de lado **L** y la cuarta parte de un círculo de radio **r.**



$$A_{sombreada} = A_{\blacksquare} - \frac{1}{4} A_{\bullet} = L^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$$

Como L = R

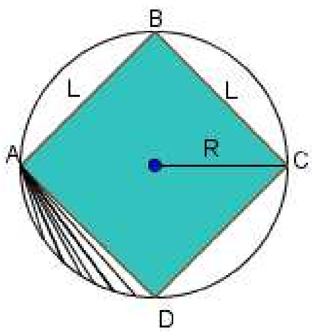
$$= r^2 - \pi \frac{r^2}{4}$$

$$= r^2(1 - \frac{\pi}{4})$$

$$= r^2(1 - \frac{\pi}{4})$$

$$= r^2(\frac{4-\pi}{4})$$

Caso en que un cuadrado ABCD de lado L está inscrito a una circunferencia de radio r.



$$AB = \sqrt{r^2 + r^2}$$

$$= r\sqrt{2}$$

$$A_{sombreada} = \frac{1}{4}\left(A_{\bullet} - A_{\blacksquare}\right)$$

$$= \left[(\pi\, r^2 \;-\; (r\sqrt{2})^2\right] \;= \frac{1}{4}(\pi - 2)$$

Utilizando el software GeoGebra construir figuras de similares condiciones a las elaboradas con material concreto y determinar el área sombreada en cada uno de los casos.

Para culminar la práctica se sugiere realizar una puesta en común en donde los estudiantes pueden discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo. ¿Cuál es el margen de error entre los cálculos de áreas sombreadas realizadas en material concreto y las realizadas en software?

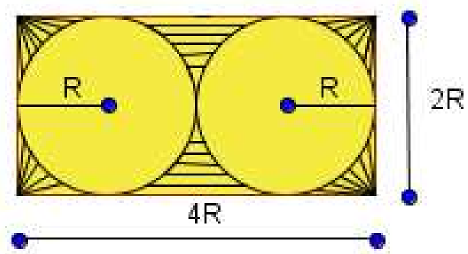
3.2.15. Guía de prácticas 15

3.2.15.1. Cálculo de áreas 03

Objetivo: Calcular la diferencia de áreas de la región comprendida entre:

- Un rectángulo y dos círculos.
- Un rectángulo y seis círculos.
- Un cuadrado y 4 círculos.
- Un cuadrado y 4 semicírculos.

a) Utilizando laminas foamy de diferente color trazamos un rectángulo de dimensiones 2**r** por 4**r** y dos círculos inscritos de radio **r.**

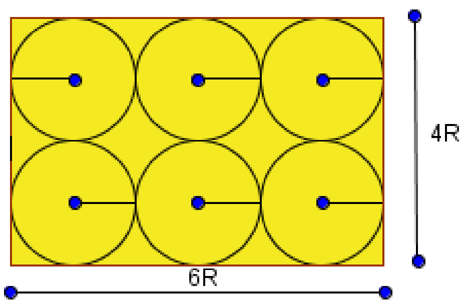


b) Medimos n veces con el escalímetro el radio del círculo, el ancho y largo del rectángulo y obtenemos la media aritmética de cada dato, que será utilizado en cálculo.

$$Diferencia_{de\ areas} = A_{\square} - 2A_{\bigcirc} = 2r.\ 4r - 2\,\pi\, r^2$$

$$= 8\,r^2 - 2\,\pi\, r^2 = 2r^2(4 - \pi\,)$$

Procedemos de igual forma y construimos un rectángulo de 6r por 4r, con seis círculos inscritos de radio r.



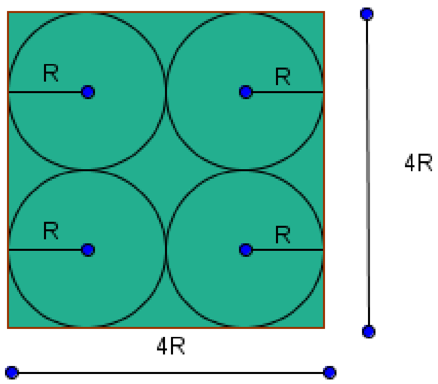
$$Diferencia_{\,de\ areas} = A_{\square} - 6A_{\bigcirc}$$

$$= 6r.\ 4r - 6\ \pi\ r^2$$

$$= 24r^2 - 6\ \pi\ r^2$$

$$= 6\ r^2\ (4 - \pi)$$

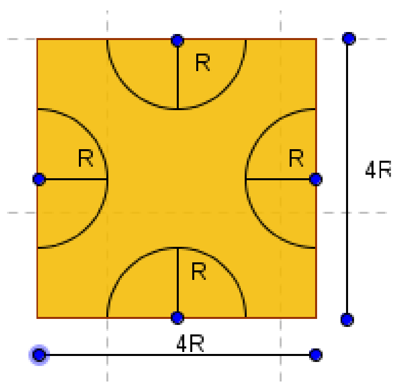
c) Procedemos de igual forma que en los casos anteriores y construimos un cuadrado de 4r por lado y 4 círculos de radio r inscritos.



$$Diferencia_{de\ areas} = (4r)^2 - 4\ \pi\ r^2$$

$$= 16\ r^2 - 4\ \pi\ r^2 = 4r^2\ (4 - \pi)$$

d) Actuando de la misma manera, armamos una figura con cuatro semicírculos de radio r en el interior de un cuadrado de lado 4r.



$$Diferencia_{de\ areas} = A_{\square} - A\ (4\frac{\bigcirc}{2})$$

$= (4r)^2 - 2\,\pi\, r^2$

$= 16\, r^2 - 2\,\pi\, r^2$

$= 2\, r^2 (\, 8 - \pi)$

A continuación se propone que utilizando el software GeoGebra se reconstruyan las figuras realizadas con material concreto y que utilizando datos numéricos se compruebe la validez de las expresiones deducidas para el cálculo de diferencias de áreas. Para ello y dando clic en el sexto icono desde la izquierda seleccionamos las opciones **circunferencia, dado su centro y radio**, se despliega una ventana en donde colocamos el valor del radio y **ok,** luego seleccionamos **semicircunferencia dado dos puntos** para erigir los semicírculos, seguidamente para la construcción del rectángulo y cuadrado aplicamos los comandos ya conocidos como son **segmento entre dos puntos**, **polígonos** y **área.**

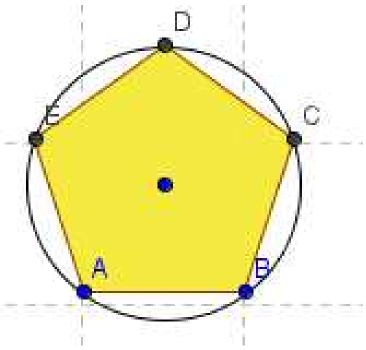
Como final de práctica el docente exhortara a los grupos que deduzcan una expresión matemática que generalice, el cálculo de la diferencia de áreas para n círculos de radio r inscritos en un rectángulo. ¿Se infiere el mismo principio para un cuadrado con n círculos de radio r inscritos? Y ¿Que ocurre con la expresión matemática, cuando las figuras inscritas son semicírculos? ¿Cuál es la relación de dependencia entre una y otra expresión? ¿Son completamente diferentes?

3.2.16. Guía de prácticas 16

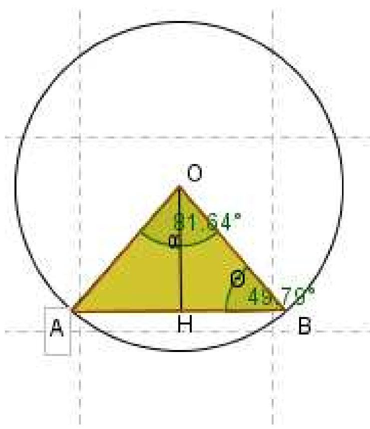
3.2.16.1. Área de polígonos regulares

Objetivo: Determinar el área de un polígono regular de **n** lados, utilizando software matemático y realizar su comprobación por medio del cálculo con la aplicación de fórmulas.

Utilizando las herramientas que nos brinda el software GeoGebra, graficamos un polígono de 5 lados, determinamos el valor de su área, y de algunos ángulos internos .Para ello y dando clic en el quinto icono desde la izquierda, seleccionamos la opción **polígono**, marcamos dos puntos en la pantalla y se despliega una ventana donde escribimos el número **5** y luego **ok**. Ubicándonos en el icono seis desde la izquierda damos clic y seleccionamos el comando **circunferencia, dado su centro y uno de sus puntos,** una vez que el polígono está inscrito a la circunferencia, nos trasladamos al icono número ocho desde la izquierda, damos clic dentro del polígono y elegimos la opción **área.**



Analíticamente comprobamos los valores determinados por el software, para ello dibujamos un pentágono inscrito a una circunferencia, en papel milimetrado formato A-4 con medidas similares, utilizando regla, compás y transportador de ángulos. Posteriormente sobre un lado cualquiera del polígono dibujamos un triángulo isósceles con uno de los vértices en el ángulo central.



a) Calculamos ángulo central $\alpha = \frac{360}{n}$

b) El $\triangle$ AOB es isósceles por lo que $< A = < B$

c) Aplicando la ley de los senos determinamos OA

$$\frac{AB}{sen\ \alpha} = \frac{OA}{sen\ \emptyset}$$

$$OA = radio = \frac{AB\ sen\emptyset}{Sen\alpha}$$

d) Hallamos la apotema del triángulo ABO aplicando Pitágoras

$$OH = \sqrt{(OA)^2 + (AH)^2}$$

e) Calculamos el perímetro.

$$P = n.\ L$$

f) Determinamos el valor del área del polígono regular de n lados con una de las siguientes expresiones semejantes, lo que podemos demostrar por medio del cálculo.

$$A = \frac{P.Ap}{2}$$

$$A = \frac{n.l\ .\ ap}{2}$$

$$A = \left[\frac{AB:OH}{2}\right]n$$

g) Proponemos a los grupos de estudiantes que obtengan una expresión que nos permita calcular el área entre el círculo y el pentágono inscrito.

Diferencia de áreas = A⬤ - A⬟

$$= \pi r^2 - \frac{P.Ap}{2}$$

$$= \pi r^2 - \frac{2r\,.\,Ap}{2}$$

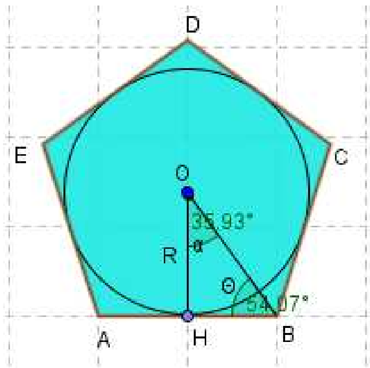
$$= \text{r} (\pi\text{r} - \text{ap})$$

Diferencia de áreas = A - A

$$= \frac{2r\,.\,Ap}{2} - \pi r^2$$

$$= \text{r} (\text{Ap} - \pi\text{r})$$

h) Repetir la práctica considerando al polígono ABCDE circunscrito al círculo.



Diferencia de áreas = A - A

$$= \frac{P.Ap}{2} - \pi r^2$$

$$= \frac{2r\,.\,r}{2} - \pi r^2$$

$$= r^2(1 - \pi)$$

Al final de la práctica el docente puede proponer a los grupos que deduzcan una expresión matemática que generalice, el cálculo del área para un polígono regular de n lados. Proponer una puesta en común, donde se discuta ¿Porque son válidas las siguientes expresiones?:

$$\left[\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \right] n \qquad\qquad [b.c\ Cos\text{Ø}\,]\text{n}$$

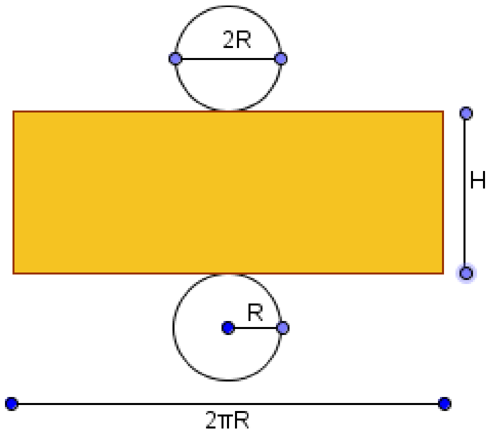
¿Para el cálculo del área de un polígono regular? ¿Qué margen de error existe entre los cálculos realizados con software y los realizados por medio de fórmulas? ¿Qué relación existe entre el área de un triángulo y el número de lados de un polígono regular? ¿Qué polígono regular se divide en 6 triángulos equiláteros?

3.2.17. Guía de prácticas 17

3.2.17.1. Área de un cilindro circular recto

Objetivo: Expresar el área de un cilindro circular recto en función de su radio.

a) Construimos un cilindro circular recto con material concreto, para ello dibujamos en las láminas foamy de colores 2 círculos de radio **r** y un rectángulo de altura **h** y base igual a 2 πr.



b) Recortamos el rectángulo y los dos círculos, luego armamos y unimos con pega las tres secciones.

c) Con la h y r medidos en cm. calculamos el volumen del cilindro utilizando la expresión πr^2 h cm^3 .

d) Calculamos el área por secciones.

$$Area_{total} = 2A\bigcirc + A\square$$
$$= 2\,\pi\, r^2 + b\,.\,h$$
$$= 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\,.h \qquad (1)$$

De la fórmula del Volumen del cilindro: V= 2 $\pi\, r^2$.h

Despejando h tenemos: h = $\frac{V}{\pi\, r^2}$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) nos queda:

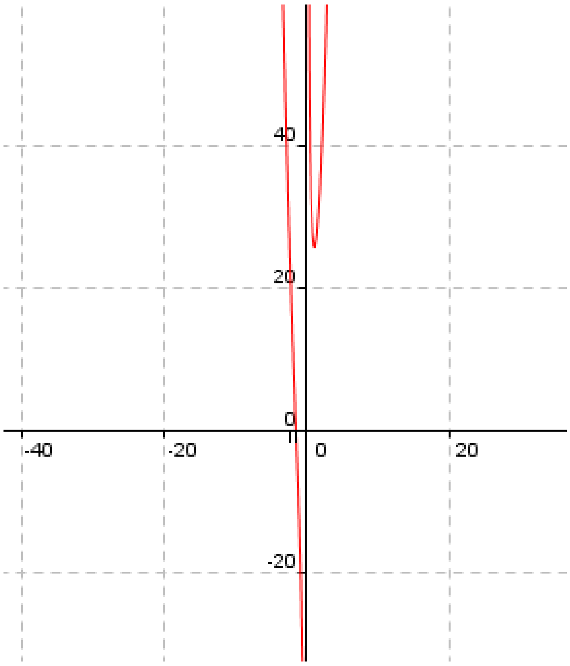
$$Area_{total} = \pi\, r^2 + \ 2\, \pi\, r\ \frac{V}{\pi\, r^2}$$

De donde: $$Area_{total} = 2\left[\frac{\pi r^3 + V}{r}\right]$$

Como la imagen de la función se debe restringir a valores positivos a fin de que sea razonable la interpretación del área. Entonces, el dominio de la función está dado por el valor de $r > 0$ y como el valor de V es conocido mediante el cálculo, podemos construir una tabla de valores y su correspondiente gráfica.

V = 10 cm.

r	0,5	1	1,5	2	3	4	5
A(r)	4,57	26,28	27,47	35,13	63,21	105,53	161,08



La gráfica construimos empleando GeoGebra, escribiendo en la barra de entrada la expresión $2\left[\frac{\pi r^3 + V}{r}\right]$ y luego **enter.** Posteriormente nos ubicamos con el cursor en el círculo y en el rectángulo respectivamente y utilizando el icono ocho desde la izquierda damos clic en la opción **área.**

Como paso previo, para concluir la práctica se recomienda realizar una puesta en común en donde los estudiantes logren discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo.

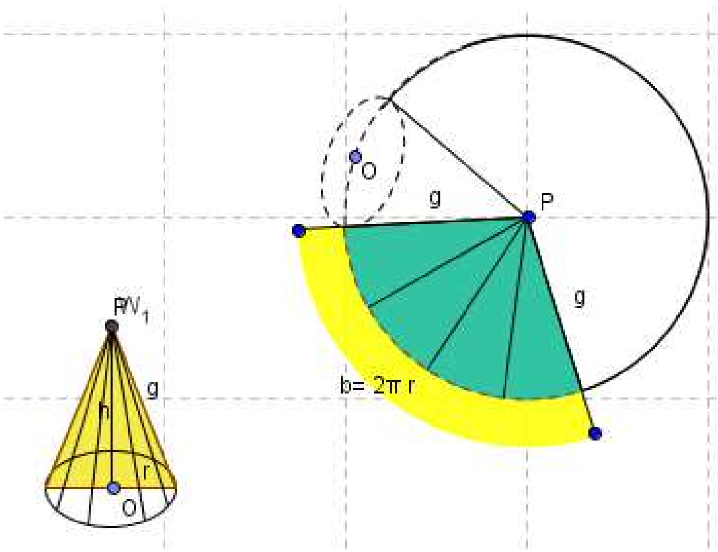
3.2.18. Guía de prácticas 18

3.2.18.1. Área lateral y total de un cono circular recto

Objetivo: Determinar el área lateral y total de un cono circular recto.

a) Utilizando material concreto foamy, trazamos un círculo de radio g.

b) En la figura siguiente se ve la construcción de la superficie lateral de un De un cono de radio r, generatriz g y altura h en una lámina foamy.



c) En el círculo que recortamos en foamy, determinamos un sector circular de radio g, el mismo que está limitado por un arco b cuya longitud es igual a la longitud de la circunferencia de la base. Entonces el área lateral del cono es igual al área del sector circular así obtenido.

d) Calculamos el área lateral del cono utilizando la siguiente proporción:

$$\frac{AL}{Ac} = \frac{b}{Lc}$$

En donde:

AL = Área lateral

Ac = Área del círculo de radio g y centro p

Lc = Longitud de la circunferencia de centro p radio g

g = generatriz = Radio de la circunferencia de radio

r = radio de la circunferencia que constituye la base del cono.

Sustituimos los valores de b= 2π r ; Ac = $\pi\, g^2$ y Lc = $2\pi g$ en la proporción planteada así $$\frac{AL}{\pi\, g^2} = \frac{2\pi\ r}{2\pi g}$$

De donde AL = $\pi\, rg$

e) Calculamos el área total del cono circular recto, la misma que corresponde a la suma del área lateral y el área de su base.

A (Total) = AL + A (base)

$= \pi\, rg + \pi\, r^2$

$= \pi\, r(g + r)$

Utilizando GeoGebra construimos una figura de similar forma y dimensiones. Como primer paso construimos la circunferencia de radio g, para ello nos ubicamos en el icono número seis desde la izquierda damos clic y en la ventana que se despliega seleccionamos la opción **circunferencia, dado su centro y su radio**, luego clic en el icono número siete, seleccionamos el comando **elipse**, erigimos esta figura tangente a la circunferencia, posteriormente con la herramienta **tangente** nos situamos en el punto P y trazamos tangentes a la elipse. Seguidamente usando la opción **sector circular con centro entre dos puntos** trazamos b. Finalmente utilizando las opciones **punto nuevo**, **segmento entre dos puntos, polígono, inserta texto** y **área** damos forma a la figura.

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo. El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo llegar a la expresión que nos permite el cálculo del área lateral y total de un cono circular recto, su utilidad y aplicación.

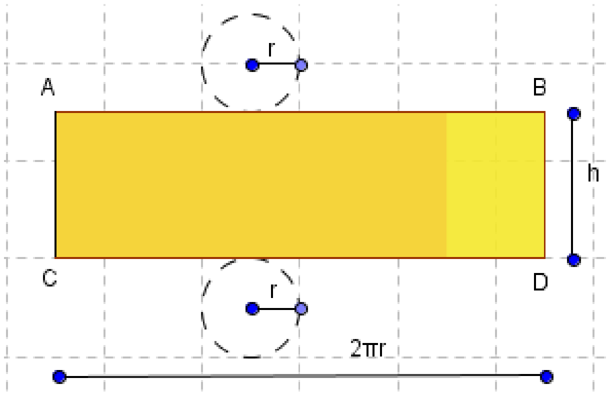
3.2.19. Guía de prácticas 19

3.2.19.1. Determinación del Área lateral y total de un cilindro circular recto

Objetivo: Determinar el área lateral y total de un cilindro circular recto.

Como sabemos el cilindro circular recto está limitado por dos círculos iguales que son las bases y por una superficie curva que es la superficie lateral.

a) Construimos en láminas foamy dos círculos de radio r que serán las bases superior e inferior y la superficie lateral del cilindro que vendría a ser una superficie plana rectangular como se aprecia en la figura.



b) Determinamos el área lateral del cilindro, para ello consideramos que el largo del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia que limitan las bases y su altura es igual a la altura del cilindro. Por lo tanto el área lateral del cilindro es igual al área del rectángulo ABCD obtenido es decir:

$$Area_{lateral} = \mathrm{AB}.\,\mathrm{h}$$

$$= 2\pi \mathrm{r}\ .\mathrm{h}$$

c) Obtenemos el área total del cilindro sumando el área lateral y la de sus dos bases.

$$Area_{total} = \text{AL + 2 Áreas de las bases}$$

$$= 2\pi \mathrm{r}\ .\mathrm{h} + 2\ \pi\ r^2$$

$$= 2\pi \mathrm{r}(\ \mathrm{h} + \mathrm{r})$$

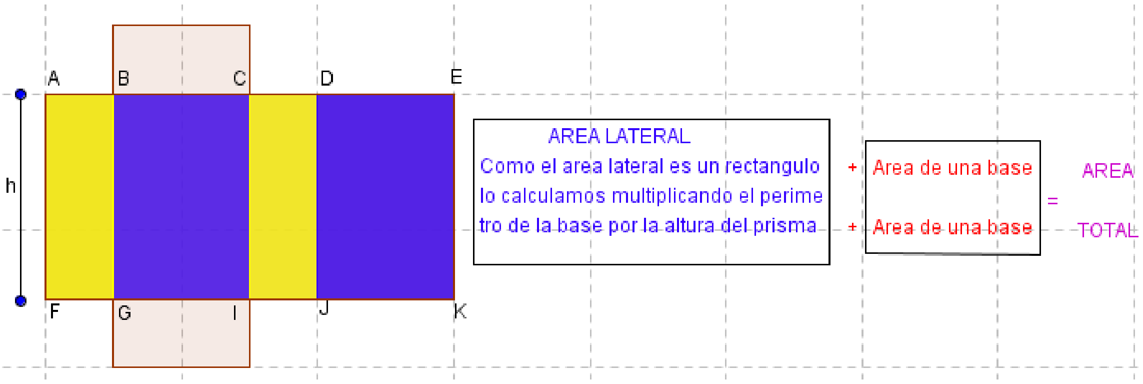
Utilizando GeoGebra construimos una figura de similar forma y dimensiones. Como primer paso construimos el rectángulo ABCD, para ello nos ubicamos en el icono número cinco desde la izquierda damos clic y en la ventana que se despliega seleccionamos la opción **polígono**, luego nos ubicamos en el icono número seis, seleccionamos la opción **circunferencia dada su centro y su radio**, se despliega una ventana donde colocamos el valor del radio y **ok**. Finalmente con el comando **área** determinamos el área lateral y total.

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo. El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo llegar a la expresión que nos permite el cálculo del área lateral y total de un cilindro circular recto, su utilidad y aplicación.

3.2.20. Guía de prácticas 20

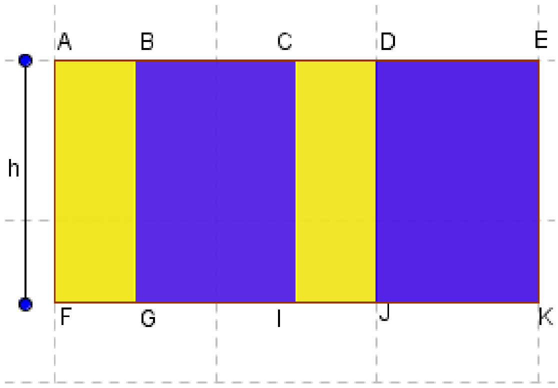
3.2.20.1. Área lateral y total de un prisma

Objetivo: Determinar el área lateral y total de un prisma de base rectangular.



a) Utilizando material concreto construimos el cuerpo de un prisma de base rectangular en un plano de material foamy.

b) Suponiendo que desarmamos el prisma. Los rectángulos marcados son las caras laterales.



c) La suma del área de las caras laterales es igual al área del rectángulo AEFK. Por lo tanto el área lateral del prisma es igual a la suma de las longitudes de la base por la altura del prisma.

De donde

$$Area_{lateral} = [lougitud\ de\ los\ lados\ de\ la\ base\ ]h$$

$$= [FG + GI + IJ + JK]\ h$$

$= [FK]\ h.$

d) Obtenemos el área total sumando el área lateral más el área de la base superior e inferior del prisma.

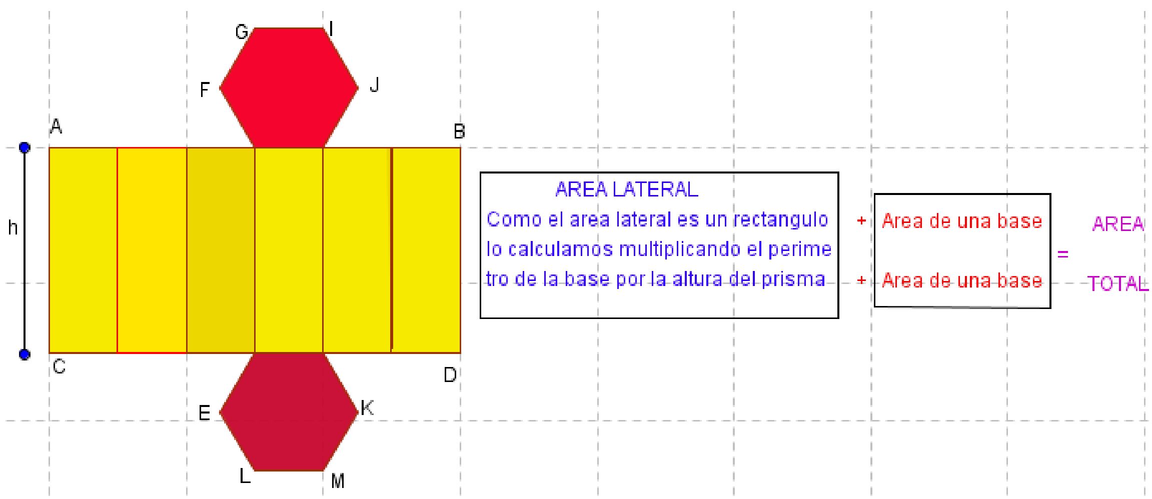
$$Area_{total} = \text{AL} + 2\ [FG][GI]$$

$$= [FG + GI + IJ + JK]h\ + 2\ [FG][GI]$$

$$= [FK]h + 2\ [FG][GI]$$

e) Utilizando GeoGebra, reconstruimos una figura del prisma con iguales dimensiones del que trabajamos en material concreto y determinamos el área lateral y total. Para ello nos ubicamos en el icono número cinco desde la izquierda damos un clic y se despliega una ventana, seleccionamos la opción **polígono** y construimos el rectángulo AEFK y sus divisiones, luego con la opción diez seleccionamos la opción **inserta texto** damos un clic, nos ubicamos donde vamos a escribir y se abre una ventana en donde ponemos el texto y **ok**. Finalmente ubicamos el cursor sobre el icono número ocho y seleccionamos **área** y determinamos el área lateral y total. Los datos así obtenidos posteriormente comparamos con los obtenidos por medio de fórmula con material concreto y verificamos el margen de error existente.

Se sugiere al docente pedir a los grupos de trabajo que construyan varios prismas teniendo de base un triángulo, un cuadrado, un pentágono y un hexágono e infieran las expresiones matemáticas que nos permitan el cálculo de sus respectivas áreas laterales y totales.



d) Completar la siguiente tabla:

	AL	AT
Prisma base triangular		
Prisma de base rectangular		
Prisma de base cuadrada		
Prisma de base pentagonal		
Prisma de base hexagonal		

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo. El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo llegar a la expresión que nos permite el cálculo del área lateral y total de un prisma de base rectangular, su utilidad y aplicación.

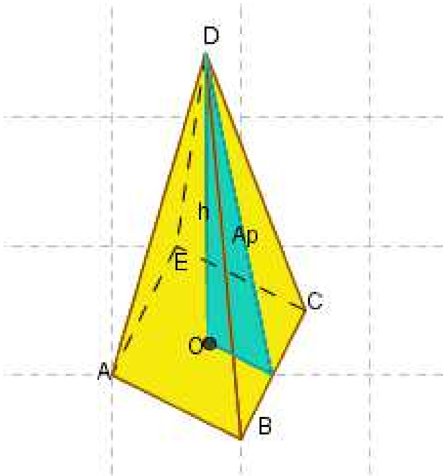
3.2.21. Guía de práctica 21

3.2.21.1. Área lateral y total de una pirámide

Objetivo: Determinar el área lateral y total de una pirámide de base rectangular.

a) Utilizando material concreto construimos el cuerpo de una pirámide de base rectangular en un plano de material foamy.

b) Suponiendo que desarmamos la pirámide. Los triángulos marcados son las caras laterales.



c) La suma del área de las caras laterales es igual al área lateral de la pirámide. Por lo tanto el área lateral de la pirámide es igual a la suma de las longitudes de la base por el doble de la altura de la pirámide.

De donde:

$AL_{1=}$ Área $\triangle$ ABD + Área $\triangle$ ECD

$$= \frac{1}{2} AB \,.\, h \; + \frac{1}{2} \; EC \,.\, h$$

Como AB=EC

$$= 2 \;\; \frac{1}{2} \text{h (AB+AB)}$$

= 2. h. AB

AL_2= Área $\triangle$ AE. h + Área $\triangle$ BC. h

$= \frac{1}{2} AE.h + \frac{1}{2}\ BC.h$

Como AE=BC

$= 2.\frac{1}{2}$ h (AE+B)

= 2h. AE

$Area_{lateral\ total}$ = 2.h.AB+2.h.AE

= 2 h (AB+AE)

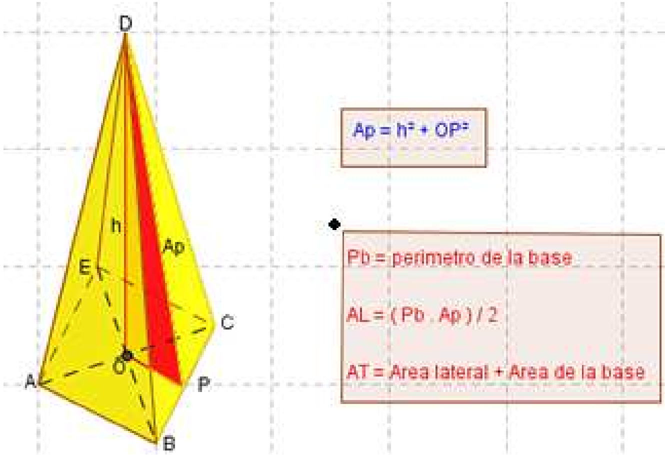
d) Determinamos el área total de la pirámide sumando el área total lateral más el área de la base.

$$Area_{total} = Area_{lateral\ total} + Area_{base}$$

= 2.h (AB+AE) + AB. AE

e) Utilizando GeoGebra, reconstruimos una figura de la pirámide con iguales dimensiones del que trabajamos en material concreto. Para ello nos ubicamos en el icono número cinco desde la izquierda damos un clic y se despliega una ventana, seleccionamos la opción **polígono** y construimos el cuadrado ABCD y sus proyecciones hacia el punto D, luego con la opción diez escogemos la opción **inserta texto** damos un clic, nos ubicamos donde vamos a escribir y se abre una ventana en donde ponemos el texto y **ok**. Finalmente ubicamos el cursor sobre el icono número ocho y seleccionamos **área** y determinamos el área lateral y total. Los datos así obtenidos posteriormente comparamos con los obtenidos por medio de fórmula con material concreto y verificamos el margen de error existente.

Se sugiere al docente pedir a los grupos de trabajo que construyan varias pirámides teniendo de base un triángulo, un cuadrado, un pentágono y un hexágono e infieran las expresiones matemáticas que nos permitirán el cálculo de sus respectivas áreas laterales y totales.



e) Completar la siguiente tabla.

	AL	AT
Pirámide base triangular		
Pirámide de base rectangular		
Pirámide de base cuadrada		
Pirámide de base pentagonal		
Prisma de base hexagonal		

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo. El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo llegar a la expresión que nos permite el cálculo del área lateral y total de una pirámide de base rectangular, su utilidad y aplicación.

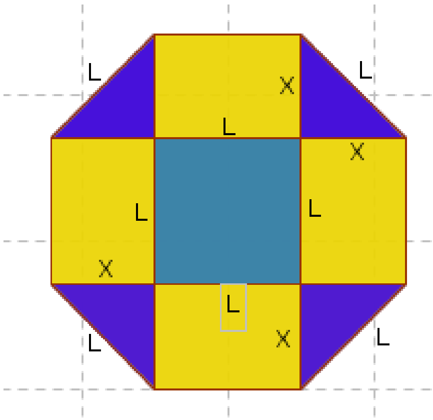
3.2.22. Guía de práctica 22

3.2.22.1. Área total de un octógono regular

Objetivo: Determinar el área total de un octógono regular en función de **L.**

a) Utilizando material concreto, trazamos un octógono regular en papel milimetrado formato A-4.

b) Trazamos cuatro diagonales, de forma que la figura quede dividida en un cuadrado central, cuatro triángulos rectángulos e isósceles en las esquinas y 4 rectángulos.



c) Determinamos que el área del cuadrado central es L^2.

d) Obtenemos el valor de uno de los lados del triángulo rectángulo e isósceles de la esquina superior derecha. En donde aplicando el teorema de Pitágoras asumimos que:

$$x^2 + x^2 = L^2$$

$$2x^2 = L^2$$

$$x^2 = \frac{L^2}{2}$$

$$x = L\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$X = L\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) Determinamos el área total del octógono. Como se observara los cuatro triángulos rectángulos forman dos cuadrados de lado x

Luego:

El área de los 4 triángulos rectángulos = 2 cuadrados

Entonces:

$$= 2\,L^2 = 2x^2$$

$$= 2\left[l\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 = 2\,.\,2\frac{L^2}{4} = L^2$$

El área de los cuatro rectángulos es 4 b. h = 4 L. x

$$= 4L.\ L\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=2L^2\ \sqrt{2}$$

Luego el área total del octógono regular será:

$$= L^2 + L^2 + 2L^2\ \sqrt{2}$$

$$= 2\,L^2(\,1 + \sqrt{2})$$

f) Verificamos la validez de la expresión 2 $L^2(\,1 + \sqrt{2})$ midiendo el valor de L en la figura y sustituyendo. Este valor del área así obtenido debe ser igual al calculado con las siguientes expresiones matemáticas:

$$\mathrm{A}= \frac{Perimetro\ .\ apotema}{2} \quad \mathrm{o} \quad \mathrm{A}= \frac{numero\ de\ lados\ .\ apotema}{2}$$

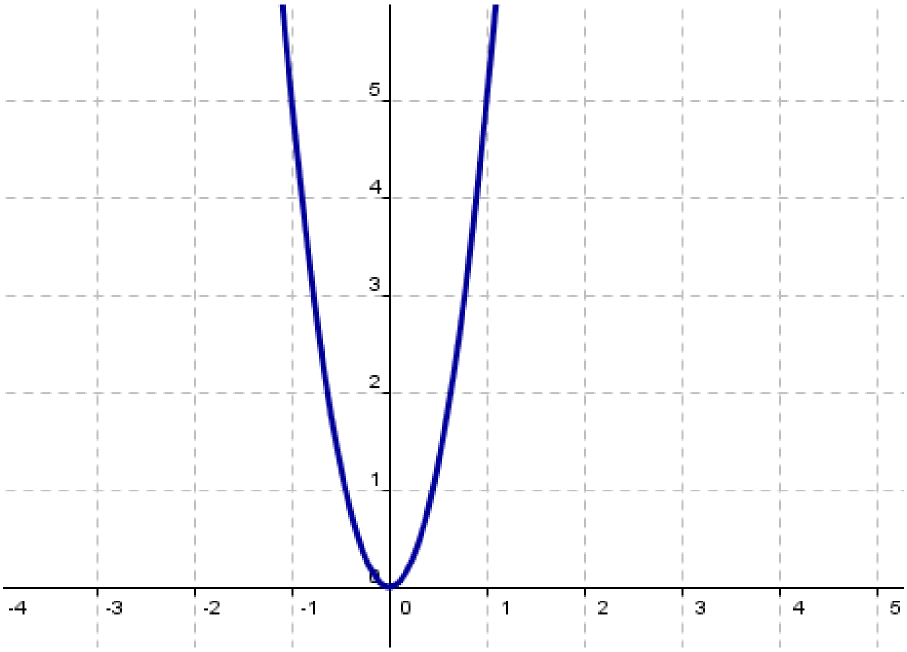
Previamente determinamos el perímetro y la apotema, sustituimos en las fórmulas y comprobamos los datos.

g) Otra forma de comprobar la validez de la expresión 2 $L^2(\,1 + \sqrt{2})$ es usando GeoGebra, con el software reconstruimos la figura del octógono con los mismos datos y determinamos el valor del área. Para ello, nos ubicamos en el icono número cinco desde la izquierda, damos un clic y seleccionamos **polígono regular** y observamos que se despliega una ventana en donde escribimos el número 8 y **ok**, luego nos situamos sobre el icono número dos y seleccionamos la opción **segmento entre dos puntos** y realizamos las divisiones interiores del octógono. Para finalizar y conformar la figura regresamos al icono número cinco, pero ahora usamos la opción **polígono** y por último, **área.**

h) Con la función obtenida construimos una tabla de valores y su respectiva gráfica.

i)

L	±1	± 2	± 3	± 4
A	4,82	19,31	48,38	77,12



Para finalizar la práctica se sugiere realizar una puesta en común en donde los estudiantes pueden discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo.

3.2.23. Guía de prácticas 23

3.2.23.1. Área de una corona

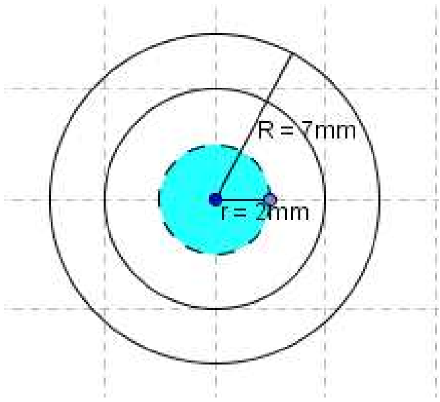
Objetivo: Construir una corona de radio externo constante y radio interno variable.

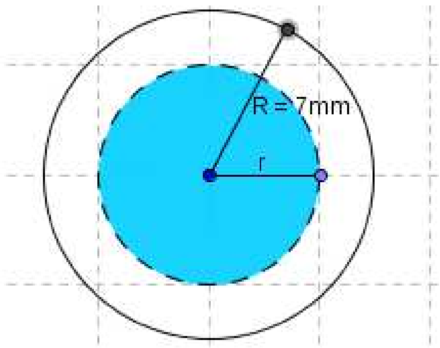
a) Construimos en GeoGebra una corona que tiene de radio externo **R** cuyo valor debe permanecer constante y un radio interno **r** con valores diferentes. Para ello, nos ubicamos con el cursor en el icono número seis desde la izquierda seleccionando la opción, **circunferencia dado su centro y radio**, nos colocamos en la posición en la que queremos que este el centro, damos clic y se despliega una ventana, en donde escribimos el valor del radio y **ok**.

b) Seguidamente trazamos los radios interno y externo con la opción **segmento entre dos puntos**, verificamos el valor del radio situándonos en el icono número ocho desde la izquierda, seleccionando el comando **distancia o longitud**.

c) Finalmente con la opción **área**, colocando el cursor sobre la figura determinamos el área de cada corona luego de variar **r.**

d) Como sugerencia, proponemos para un mejor desarrollo de la práctica que R tenga un valor constante de 7mm y que **r** tenga un valor inicial de 2mm.





e) Disminuyendo y aumentando el radio interno r en el software obtenemos diferentes áreas de la corona, las mismas que corroboramos por medio del cálculo.

f) Determinamos los diferentes valores que toma r cuando disminuimos el área inicial en un 20%.

Área inicial de la corona = A_0 = $\pi(R^2 - r^2)$

= π (49- 4)

= 45 π mm^2

Área disminuida el 20% = 0.8 (45 π) mm^2

= 36 π mm^2

Luego para determinar el radio interno:

36 π = π (49- r^2)

36 – 49= - r^2

13= r^2

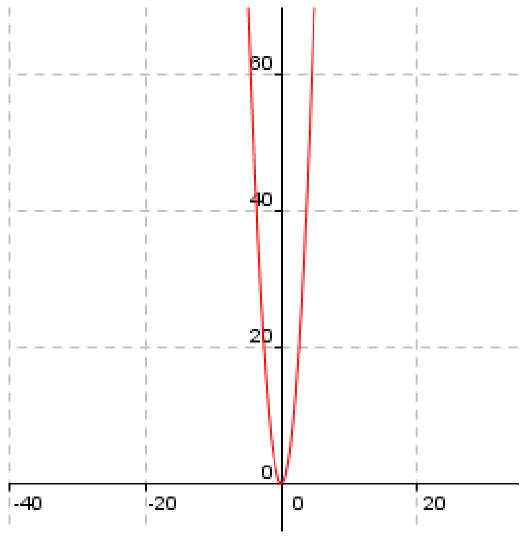
$$r = \sqrt{13}$$

g) Siguiendo el mismo procedimiento determinamos **r** cuando el área inicial disminuye el 10%, 30%, 40% y 50%.

h) Completamos la siguiente tabla.

A_0 Disminuida al	10%	20%	30%	40%	50%
ÁREA	40,5 π	36 π	31,5 π	27 π	22,5 π
r	$\pm\sqrt{8,5}$	$\pm\sqrt{13}$	$\pm\sqrt{17,5}$	$\pm\sqrt{22}$	$\pm\sqrt{26,5}$

i) Construimos la respectiva gráfica considerando a r como la variable independiente.



Para finalizar la práctica se sugiere realizar una puesta en común en donde los estudiantes pueden discutir los razonamientos a los que abordaron y proponer nuevas alternativas de cálculo. Plantear una situación problémica en donde en lugar de construir una corona, estuviéramos diseñando una arandela que por causa del incremento en los costos de producción se pretende disminuir la figura en un 10, 20, 30, 40 y 50% y que para ello conservará el mismo grosor y radio externo, pero el radio interno será mayor.

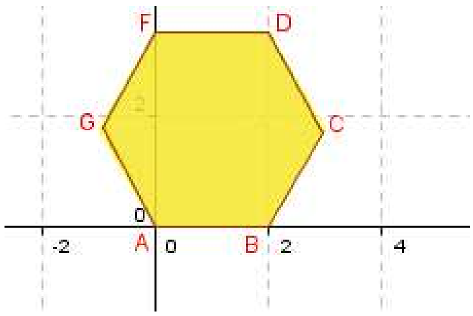
3.2.24. Guía de Prácticas 24

3.2.24.1. Volumen de un prisma regular

Objetivo: Determinar el volumen de un prisma regular que tiene de altura **h** y de base un hexágono de base **L** inscrito a una circunferencia de radio **r.**

a) En una lámina de papel milimetrado formato A-4 dibujamos un hexágono regular de lado **L** en un plano cartesiano, e inscrito a una circunferencia de radio **r.**

b) Se sugiere establecer que dos de sus vértices consecutivos tengan de coordenadas F (0,0) y G (L, 0).

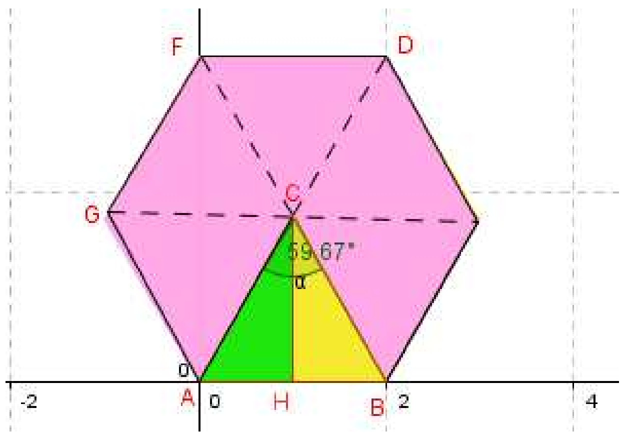


c) Aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener FG= L.

$$L=\sqrt{(0-L)^2+(0{,}0)^2}=\sqrt{L^2}=L$$

d) Medimos L con el escalímetro y comparamos $L_{calculado}$ con L_{medido}.

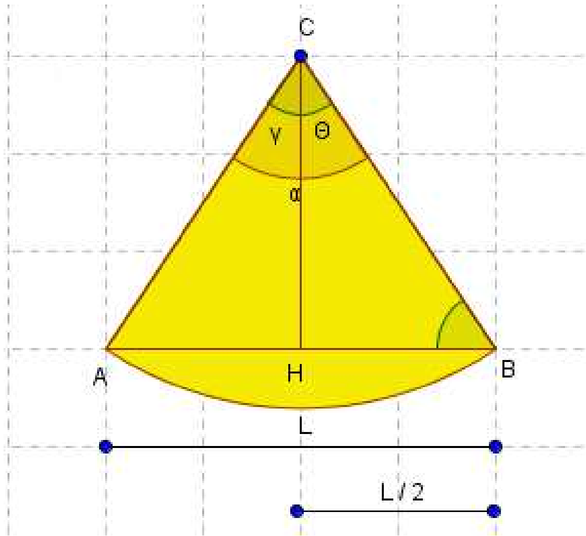
e) Trazamos las diagonales FB, DE, y AG, dividiendo al hexágono en 6 triángulos equiláteros iguales.



AB = L $\qquad\qquad \propto=\frac{360}{n}=60$

f) Dado que los 6 triángulos en que se divide el hexágono son equiláteros e iguales, para el análisis seleccionamos el triángulo ABC.

g) Dividimos al triángulo equilátero ABC en 2 triángulos rectángulos e iguales y determinamos:



HB= $\frac{L}{2}$ $\qquad$ $\Theta = \frac{\propto}{2}$ =30

L= AB =CB = AC por ser lados de un triángulo equilátero

Calculamos el valor de la altura del triángulo ABC

$$CH= \sqrt{(CB)^2 - (HB)^2}$$

$$CH=\sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$CH=\sqrt{\frac{4L^2-L^2}{4}}$$

$$CH=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}$$

$$CH=\frac{L}{2}\sqrt{3}$$

h) Deducimos el área de la base del prisma:

Área de la base del prisma = $[Area\ de\ uno\ de\ los\ triangulos\ interiores\ del\ polig.]\ nl$

Área de la base del prisma= $\left[\frac{Base\ .altura}{2}\right]\ 6$

$=\left[\frac{L\ \frac{L}{2}\ \sqrt{3}}{2}\right]6$

$=\frac{3\ L^2\ \sqrt{3}}{2}$

i) Obtenemos el volumen del prisma, multiplicando el área de la base por el valor de la altura:

V = área de la base por la altura

$V=\frac{3\ L^2\ \sqrt{3}}{2}\ h$

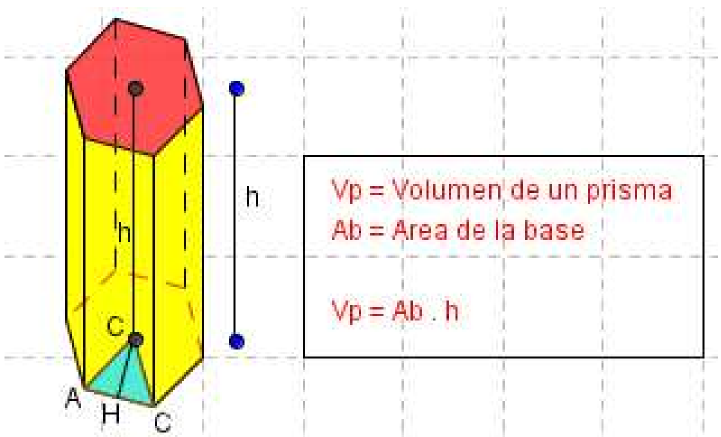
De la gráfica anterior deducimos que cuando un hexágono regular está inscrito a una circunferencia el valor de su lado es igual al radio, es decir L= R por lo que la fórmula del volumen para el caso particular de un prisma cuya base es un hexágono regular se puede expresar así:

$V==\frac{3\ r^2\ \sqrt{3}}{2}\ h$

j) Se sugiere pedir a los grupos repetir el proceso para determinar el volumen de un prisma cuya base es una figura regular de 4, 5, 7, 8 y 9 lados y completar la siguiente tabla.

Figura de la base	Área de la base	Volumen
Cuadrado		
Pentágono		
Heptágono		
Octógono		
Eneágono		

k) Dando valores a **L** y **h** obtener el volumen aplicando las formulas obtenidas en la última columna de la tabla anterior y por medio del software GeoGebra, reconstruir las figuras de los polígonos determinar tanto el área como el volumen y comparar el $Volumen_{medido}$ $con\ el\ Volumen_{Calculado}$. Para ello, nos ubicamos con el cursor en el icono número cinco desde la izquierda seleccionando la opción **polígono regular**, marcamos dos puntos considerando el ancho del lado y la posición en la que queremos que este la figura, se despliega una ventana, en donde escribimos el número de lados del polígono que para nuestro caso es 6 y **ok**. Seguidamente dividimos la figura, trazando diagonales con la opción **segmento entre dos puntos**, luego colocamos el cursor sobre el icono número cinco, escogiendo la opción **polígono** construimos el triángulo ABC, posteriormente con los comandos **ángulo**, **longitud** y **área** completamos los elementos del triángulo. Finalmente nuevamente con la opción área, pero esta vez colocando el cursor sobre la figura determinamos el área de todo el hexágono[36] que multiplicado por la h nos da el volumen.



Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo ¿Que deducimos de los datos de la última columna? ¿Qué ocurriría con la fórmula del área y la del volumen del prisma si la figura, en este caso el hexágono estaría circunscrito al círculo? El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo inferir la expresión que nos permite el cálculo del volumen de un prisma, su utilidad y aplicación.

[36] Que vendría a ser el área de la base

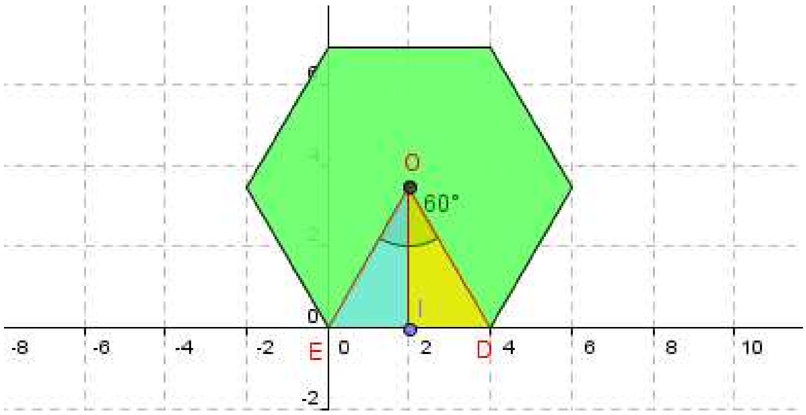
3.2.25. Guía de prácticas 25

3.2.25.1. Volumen de una pirámide

Objetivo: Determinar el volumen de una pirámide que tiene de altura **h** y de base un hexágono regular de lado **L.**

a) En una lámina de papel milimetrado formato A-4 dibujamos un hexágono regular de lado **L** en un plano cartesiano, e inscrito a una circunferencia de radio **r.**

b) Se sugiere establecer que dos de sus vértices consecutivos tengan de coordenadas E (0,0) y D (L, 0).



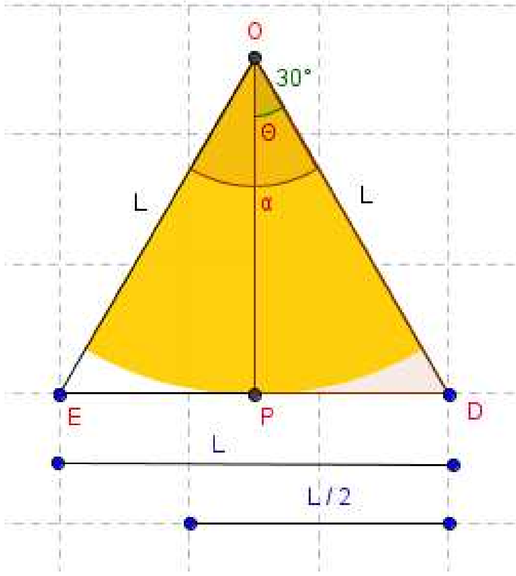
ED = L $\qquad\qquad \propto = \frac{360}{n} = 60$

c) Aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener ED= L.

$$ED=\sqrt{(0-L)^2+(0{,}0)^2} = \sqrt{L^2} = L$$

d) Dado que los 6 triángulos en que se divide el hexágono son equiláteros e iguales, para el análisis y comprobación seleccionamos el triángulo EOD.

e) Dividimos al triángulo equilátero EOD en 2 triángulos rectángulos e iguales y determinamos los elementos base y altura que nos permitirán el cálculo del área del triángulo EOD.



PD= $\frac{L}{2}$ $\Theta = \frac{\propto}{2}$ =30

L= ED =DO = OE por ser lados de un triángulo equilátero

Calculamos el valor de la altura OP del triángulo EOD

Como tg 30 = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tenemos tg 30 = $\frac{PD}{OP}$

OP= $\frac{PD}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

OP = $\frac{\frac{L}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

OP = $\frac{L\sqrt{3}}{2}$

f) Deducimos el área de la base del prisma:

Área de la base del prisma= $[Area\ de\ uno\ de\ los\ triangulos\ interiores\ del\ polig.]\ nl$

Área de la base del prisma= $\left[\frac{Base\ .altura}{2}\right]\ 6$

$$=\left[\frac{L\,\frac{L}{2}\,\sqrt{3}}{2}\right]6$$

$$=\frac{3\,L^2\,\sqrt{3}}{2}$$

g) Obtenemos el volumen del prisma, multiplicando el área de la base por el valor de la altura:

$$V = \frac{Area\ de\ la\ base\ por\ la\ altura}{3}$$

$$V= \frac{\frac{3\,L^2\,\sqrt{3}}{2}h}{3} = \frac{L^2\sqrt{3}\,h}{2}$$

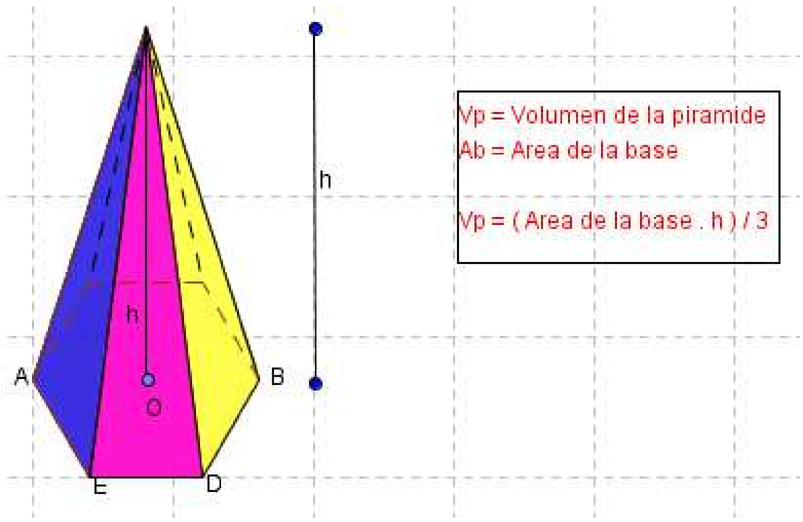
De la gráfica anterior deducimos que cuando un hexágono regular está circunscrito a una circunferencia el valor de su lado ya no es igual al radio, es decir L≠ R como sucede cuando la figura está inscrita a la circunferencia. Pero en este caso el valor del radio coincide con el valor de la altura.

Se sugiere pedir a los grupos repetir el proceso para determinar el volumen de una pirámide cuya base es una figura regular de 4, 5, 7, 8 y 9 lados y completar la siguiente tabla.

Figura de la base	Área de la base	altura	Volumen
Cuadrado			
Pentágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			

h) En la misma tabla dando valores a **L** y **h** obtener el volumen aplicando las formulas obtenidas en la última columna.

Por medio del software GeoGebra, reconstruir las figuras de los polígonos determinar tanto el área como el volumen y comparar el $Volumen_{medido}\ con\ el\ Volumen_{Calculado}$. Para ello, nos ubicamos con el cursor en el icono número cinco desde la izquierda seleccionando la opción **polígono regular**, marcamos dos puntos considerando el ancho del lado y la posición en la que queremos que este la figura, se despliega una ventana, en donde escribimos el número de lados del polígono que para nuestro caso es 6 y **ok**. Seguidamente dividimos la figura, trazando diagonales con la opción **segmento entre dos puntos**, luego colocamos el cursor sobre el icono número cinco, seleccionando la opción **polígono,** construimos el triángulo EOD, posteriormente con los comandos **ángulo**, **longitud** y **área** completamos los elementos del triángulo. Finalmente nuevamente con la opción área, pero esta vez colocando el cursor sobre la figura determinamos el área de todo el hexágono[37] que multiplicado por la h nos da el volumen.



Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo ¿Que deducimos de los datos de la última columna? ¿Qué ocurriría con la fórmula del área y la del volumen del prisma si la figura, en este caso el hexágono estaría inscrito a la circunferencia? El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo inferir la expresión que nos permite el cálculo del volumen de una pirámide, su utilidad y aplicación geométrica.

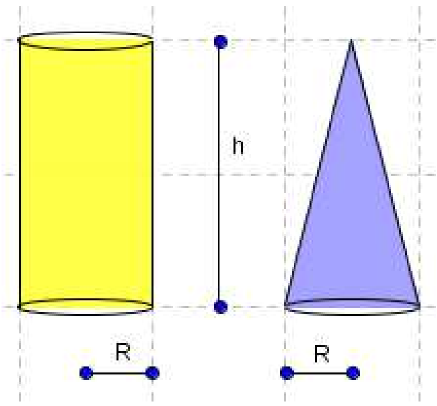
[37] Que vendría a ser el área de la base

3.2.26. Guía de prácticas 26

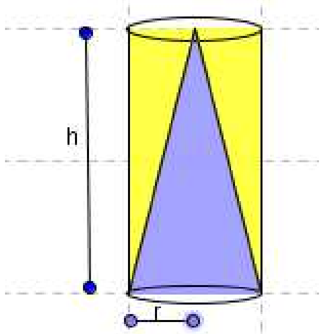
3.2.26.1. Diferencia de volúmenes

Objetivo: Determinar la diferencia de volúmenes que existe entre un cono circular recto y un cilindro circular recto de iguales radios **r** y alturas **h.**

a) Utilizando software construimos por separado un cilindro y un cono de similar radio y altura. Para ello nos ubicamos en el icono número siete desde la izquierda, seleccionamos la opción **elipse** y trazamos las dos tapas del cilindro y posteriormente ubicando el cursor en el icono tres seleccionamos el comando **segmento entre dos rectas** y estructuramos el cilindro, procedemos de manera similar en la construcción del cono. Finalmente situándonos en el icono número ocho y seleccionando las opciones **área** y **longitud** determinamos los correspondientes volúmenes.



b) Superponemos las dos figuras de tal forma que coincidan las circunferencias.



c) Determinamos la parte sombreada de color amarillo, que como podemos observar por medio del software nos indica la diferencia de volúmenes, el mismo que confirmamos por medio del cálculo, aplicando las formulas respectivas, además determinamos cual es el porcentaje de margen de error entre uno y otro.

$$Volumen_{parte\ sombreada} = Volumen_{Cilindro} - Volumen_{Cono}$$

$$= \pi\, r^2\, h - \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$

$$= \pi\, r^2\, h \left[1 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\, \pi\, r^2\, h$$

d) Establecemos cual es el porcentaje del margen de error entre el volumen determinado por el software y el calculado.

e) Determinamos la diferencia de volúmenes cuando el **r** y **h** del cilindro es el doble que el **r** y **h** del cono.

$$Volumen_{parte\ sombreada} = \pi\, 4\, r^2\, 2\, h - \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$

$$= 8\, \pi\, r^2\, h - \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$

$$= \pi\, r^2\, h \left(8 - \frac{1}{3}\right) = \frac{23}{3}\, \pi\, r^2\, h$$

Se recomienda pedir a los grupos determinar la diferencia de volúmenes cuando el **radio** y la **h** tanto del cono como del cilindro varían según la tabla.

Cilindro		Cono		Diferencia de volumen
r	h	$\frac{r}{3}$	$\frac{h}{3}$	
3r	3h	r	h	
r	h	$\frac{r}{2}$	$\frac{h}{2}$	
r	h	$\frac{2r}{3}$	$\frac{h}{3}$	
r	h	$\frac{r}{4}$	$\frac{h}{3}$	

Una vez que los estudiantes hayan concluido las actividades se sugiere una puesta en común para socializar los logros obtenidos por cada grupo ¿Que deducimos de los datos de la última columna? ¿Cuál es la relación entre la fórmula del volumen del cilindro y la del volumen del cono? El docente puede orientar las disertaciones teniendo como objetivo inferir la expresión que nos permite el cálculo del volumen del cilindro y la del cono, su utilidad y aplicación geométrica.

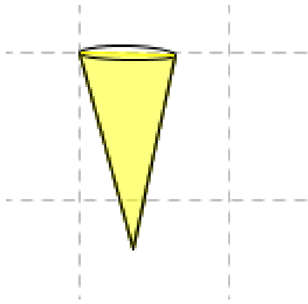
3.2.27. Guía de práctica 27

3.2.27.1. Relación de volúmenes

Objetivo: Establecer que la relación existente entre el volumen de un prisma y el de una pirámide con iguales bases y altura, es la misma que existe entre los volúmenes de un cilindro y un cono que cumplan con las mismas condiciones.

a) Construimos un cono de radio **r** y altura **h** con una capacidad de 250 cm^3 sin la tapa circular.

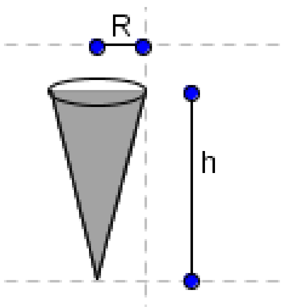
b) Llenamos de arena fina hasta el borde del cono.

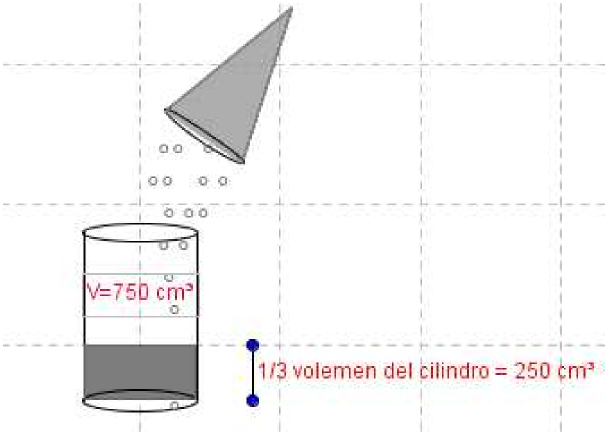


c) Trasponemos la arena en un vaso de precipitados de radio **r** y altura **h** con una capacidad de 750cm^3

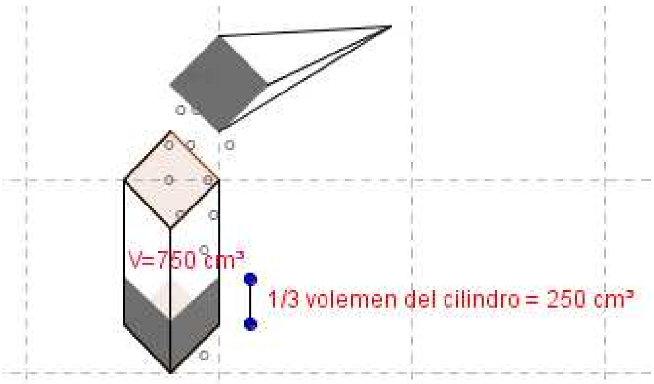
d) Observamos que la cantidad de arena que paso del cono al vaso de precipitados, marca en el menisco del vaso de precipitados un volumen de 250cm^3.

De la experiencia anterior, se puede inferir que el volumen de cono circular recto corresponde la tercera parte del volumen de un cilindro circular recto, siempre que tengan la misma altura y radio o lo que es lo mismo el volumen de un cilindro circular recto tres veces el volumen de un cono circular recto.





e) Construimos un prisma y una pirámide con capacidades de 750 cm^3 y 250cm^3 respectivamente de igual base y altura sin la tapa que sirve de base.



f) Igual que en el caso anterior llenamos de arena la pirámide y la trasponemos en el prisma; observando que solo se ocupa la tercera parte.

Para el cierre de la práctica sugerimos al docente socializar los razonamientos a los que llegaron los alumnos y que enuncien correctamente las expresiones geométricas inferidas.

$$V_{cono} = \frac{1}{3}V_{cilindro} = \frac{1}{3}A_{base} \, .altura$$

$$V_{piramide} = \frac{1}{3}V_{prisma} = \frac{1}{3}A_{base} \, .altura$$

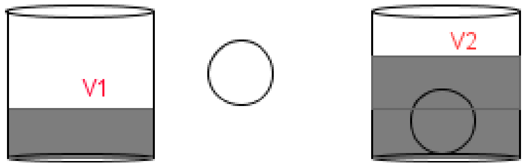
3.2.28. Guía de prácticas 28

3.2.28.1. Volumen de la esfera y semiesfera

Objetivo: Determinar el volumen de la esfera y semiesfera

a) En un vaso de precipitados de $500cm^3$ introducimos un volumen $\mathbf{V_1}$ de agua que lo marcamos.

b) Luego sumergimos una esfera de acero de diámetro **d** en el vaso de precipitados y observamos que el volumen del agua aumenta a $\mathbf{V_2}$ que también lo marcamos.



c) Determinamos el volumen medido de la esfera.

$$V_{medido\ de\ la\ esfera} = V_2 - V_1$$

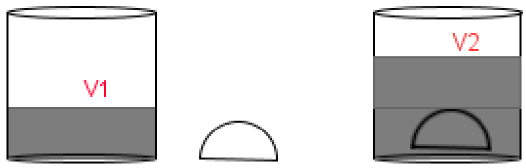
d) Calculamos el volumen de la esfera por medio de la formula. Pero previamente establecemos el valor del diámetro con la ayuda del calibrador, para ello tomamos 5 medidas del diámetro y obtenemos la correspondiente media aritmética.

Entonces

$$V_{calculado\ de\ la\ esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

e) Comparamos el V_{medido} con el $V_{calculado}$.

f) Repetimos el proceso:



Pero ahora utilizando la mitad de una esfera de acero o semiesfera y determinamos el volumen medido de la semiesfera.

a) Con ayuda del calibrador y utilizando el mismo procedimiento anterior calculamos el volumen de la semiesfera utilizando.

$$V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi\, r^3$$

Como también $V_{semiesfera} = \frac{Volumen\ de\ la\ esfera}{2}$

b) Seguidamente comparamos el $V_{medido\ semiesfera}$ con el $V_{calculado\ semiesfera}$

A manera de recomendación se sugiere al docente en esta parte de la práctica pedir a los grupos que repitan el procedimiento, utilizando una esfera de igual diámetro pero de madera.

Como cierre de práctica el docente pedirá socializar los razonamientos a los que llegaron los diferentes grupos y que enuncien correctamente las formulas analizadas. ¿Se podrá aplicar esta forma de hallar el volumen cuando los cuerpos son irregulares? ¿Hay diferencia entre el volumen de una esfera de acero y el volumen de una esfera de madera de igual diámetro, medidos por este método? ¿Por qué el volumen medido no es igual al calculado?

3.3. Descripción de la experiencia

El aula, al no disponer de laboratorio fue el espacio en donde los alumnos con la ayuda de los materiales seleccionados construyeron su propio conocimiento, interpretando los conceptos y procedimientos, que no solo les lleve a aplicar una fórmula mecánicamente, sino que ahora tenga un significado más real basado en sus experiencias. Para ello se planteó como objetivo que los aprendizajes adquiridos perduren en los estudiantes a través del tiempo y puedan ser reutilizados, para seguir incorporando a su saber nuevos contenidos de la Geometría.

El laboratorio experimental de geometría consistió en el desarrollo de una serie de prácticas, donde los alumnos, conocían y manipulaban recursos didácticos como el material concreto y el software GeoGebra para adquirir aprendizajes de los contenidos del bloque de Geometría para décimo año de educación general básica. Tanto el software como el material concreto fueron utilizados permanentemente en las prácticas, verificando por medio de la observación, los informes de laboratorio, que lo que aprendió teóricamente tiene un fundamento real.

En cada práctica los estudiantes trabajando en grupos pequeños seguían las guías didácticas de laboratorio que se les asignaba, durante las mismas se tomaban fotos y en ocasiones se hacían grabaciones de video que luego se proyectaba en el aula virtual de la institución para que otros alumnos y profesores del área pudiesen observar el desarrollo de las prácticas. Muchas veces la grabación se centró en las preguntas que hacían los alumnos, lo que posteriormente les permitía observar errores tanto en el lenguaje matemático verbal como en la forma de plantear las preguntas.

Se logró una alta participación de los alumnos durante el desarrollo de las prácticas y en las puestas en común. Los alumnos pudieron explorar las posibilidades didácticas tanto de los recursos específicos [38] para el aprendizaje como de materiales comunes[39] a cualquier centro educativo, de tal manera que se fomentó el desarrollo de algunas destrezas con criterio de desempeño.

La experiencia ha aportado a los estudiantes la oportunidad de conocer diferentes herramientas didácticas y en base a estas, han podido reproducir determinados temas vistos en clase mediante el desarrollo de prácticas experimentales de laboratorio.

Las prácticas de laboratorio han permitido que los alumnos de décimo de educación general básica, compartan experiencias en el desarrollo de las diferentes actividades didácticas y en la manipulación de los recursos, identificando las fortalezas y debilidades que presentan; de la misma manera, han identificado los posibles errores que pueden cometerse por una mala selección de los materiales

[38] Geoplano, tangram, foamy, software matemático

[39] Tijeras, pega, papel de colores, etc.

concretos o del software, la escasez de ellos y la dificultad de su uso en algunos temas de prácticas.

Este tipo de actividades fortalece en gran medida las relaciones sociales entre el alumnado por cuanto comparten experiencias, conocimientos. Las prácticas experimentales mejoran entre otros aspectos el dominio de las metas matemáticas, la motivación, el involucramiento, el trabajo cooperativo, la comprensión, la comunicación, el debate, les permite estudiar desde otra perspectiva los contenidos de la geometría.

En la mayor parte de las guías de prácticas realizadas se utilizaron dos herramientas didácticas, el material concreto y el software GeoGebra, pero no de una manera aislada, sino por el contrario estableciendo un nexo entre las dos, permitiendo que la una sea el complemento de la otra , que el estudiante se beneficie llenando las deficiencias del aprendizaje tradicional, con un aprendizaje en donde la reflexión, el análisis, el entendimiento superen al simple rol de transmitir conocimientos, memorizar los hechos, y desarrollar ejercicios repetitivos.

El aprendizaje de la geometría, por medio de prácticas experimentales de laboratorio, incrementó la motivación, fomentó el trabajo cooperativo, la creatividad, apoyó la interdisciplinariedad, la individualización, promovió el uso de estrategias de razonamiento de alta calidad, planteó soluciones nuevas a situaciones concretas de la vida cotidiana y sobre todo liberó al profesor de tareas rutinarias.

Cada vez que se concluía un tema del bloque de geometría, se procedía a realizar una práctica de laboratorio, evaluando los resultados del uso de material concreto y software en la misma, de tal forma que si los resultados no eran los esperados, se podía, tomar los correctivos necesarios a tiempo.

Al terminar de desarrollar todas las prácticas de laboratorio propuestas, se evaluó tanto el nivel cognitivo como las destrezas con criterio de desempeño logradas, estableciendo una comparación entre el aprendizaje de la Geometría impartida en forma tradicional en el paralelo B y el impartido por medio de prácticas de laboratorio experimentales provistas de software y material concreto en el paralelo “A”.

Finalmente, la inclusión del software como estrategia de aprendizaje en las prácticas permitió realizar manipulaciones, modificaciones en los contenidos y orientar el desarrollo de capacidades como: observar, ordenar la información, recordar, inferir y resolver problemas. Se promovió mejores aprendizajes haciendo que los alumnos trabajen con problemas significativos, relevantes, del mundo real, utilizando medios que les permitan ser más activos, participativos y autónomos en la adquisición de conocimientos, dinamizando con su uso el aula de clase.

CONCLUSIONES

Luego de concluir con el desarrollo de las prácticas experimentales de Geometría, provista de software y material concreto, los alumnos que participaron en la experiencia lo consideraron beneficioso para el proceso pedagógico de la matemática. De igual manera el empleo del software permitió al estudiante inferir, realizar experimentos, demostraciones, cálculos. Le facilito visualizar el sentido que para él tiene ese nuevo aprendizaje al relacionarlo con sus conocimientos previos, además, le permitió al estudiante acceder a cambios significativos en el entorno del aula con clases dinámicas, activas, participativas, cooperativas y centradas en el estudiante.

Por otro lado, se comprobó que con el empleo de estas herramientas didácticas, se generó un ambiente de aprendizaje que motivó a la reflexión y al análisis fomentando una actitud positiva y critica, tanto en la solución de problemas como en la toma de decisiones. En tal sentido, la realización de esta investigación ha permitido enriquecer los conocimientos que se tenían sobre el uso del software matemático como herramienta cognitiva, para mejorar el aprendizaje del cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas regulares en los alumnos.

El uso del software geogebra, resultó beneficioso porque con la valiosa orientación del profesor, como guía del proceso, se dinamizó el aula de clases; promoviendo en los alumnos autonomía al adquirir sus conocimientos, haciéndoles más activos, creativos y participativos

Con el uso del software geogebra y el material concreto como estrategias didácticas, se mejoró el nivel de aprendizaje del grupo que lo utilizó, evidenciándose en el rendimiento académico, ya que el grupo de intervención obtuvo un promedio de 16,21 frente a un promedio de 14,1 del grupo de control. Por lo tanto el estudio aporta evidencias que es asequible el uso del software bajo una metodología constructivista. Sin embargo sería oportuno y conveniente realizar otras pruebas con otros estudiantes, de otras Instituciones y de otro nivel socio-económico, ya que los resultados encontrados son válidos para este grupo en particular.

La incorporación de las nuevas tecnologías como parte de un proceso de innovación pedagógica, requiere entre otras instancias generar aprendizajes más relevantes que provoquen un impacto efectivo en la educación. Las guías didácticas que se presentaron pretenden ser una alternativa que brinde apoyo y que complemente el aprendizaje del alumno. De esta manera lo que se quiere es acercar a los integrantes del proceso pedagógico, mejorando sus prácticas habituales y explorando otras nuevas, con el fin de optimizar la calidad educativa y preparar a los estudiantes para nuevos desafíos que les espera como adultos.

.

RECOMENDACIONES

Es conveniente utilizar tecnología en educación, porque brinda un abanico de posibilidades para mejorar el proceso pedagógico, con el uso de herramientas didácticas: como el software matemático y el material concreto en las prácticas experimentales de laboratorio se ubica el aprendizaje de la geometría, en un nuevo nivel, en donde se fomenta la motivación, la creatividad, la capacidad de inferir, el análisis, la resolución de problemas, el aprendizaje colectivo y el trabajo grupal, mejorando las relaciones interpersonales, entre otros.

De los resultados obtenidos con el grupo de intervención se desprende que para aplicar la geometría dinámica, en el salón de clases, el Docente debe apoyarse en el software educativo, lo que permitirá que el estudiante se apropie del conocimiento de una manera más efectiva y entretenida. Con ello, tendremos la oportunidad de enseñar matemática por medio de gráficos, imágenes y construcciones geométricas, que permitirán que el alumno, en base a la exploración y recreación de conceptos matemáticos, consiga modelar funciones con los datos de experimentos desarrollados en el aula, obteniendo un aprendizaje activo, colaborativo e investigativo.

La utilización del software y material concreto por medio de guías de prácticas favorece la creación de situaciones de aprendizaje, en donde el estudiante conoce de forma inmediata si los resultados obtenidos son correctos, y si no lo son, poder aplicar los correctivos necesarios a tiempo. Además en función de estas herramientas, se sugiere diseñar guías didácticas en donde los estudiantes aprendan conceptos de una manera práctica, obligándoles a trabajar, a razonar, a comunicar, a utilizar contextualmente las ideas matemáticas y a realizar comparaciones con otros problemas no rutinarios, fomentando la labor tutorial del Docente.

De ninguna manera se pretende que las tecnologías informáticas, sean un sustituto del Docente en el aula, sino que contribuya a facilitar la motivación, que es fundamental en el proceso de interaprendizaje, por eso es pertinente dar a los contenidos matemáticos un carácter atractivo, con clases más amenas y participativas que le proporcionen al estudiante la realimentación de los contenidos teorico-practicos adquiridos. Además que estas herramientas pueden utilizarse para realizar repaso de temas en horas extra clase.

Sobre la base de lo expuesto, está claro que cada día que pasa es más importante el uso de los recursos informáticos en el aula, pues estos permitirán ampliar las experiencias de aprendizaje, pero no solo hace falta usar la tecnología, se recomienda capacitarnos, para enfrentar los cambios que el nuevo proceso educativo vigente desde el año 2010 y la sociedad nos plantean, para aplicar e innovar el proceso de interaprendizaje.

BIBLIOGRAFIA

Ángel, Juan y Bautista, Guillermo. *Didáctica de las matemáticas en enseñanza superior*.12 de Enero.2013. http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html

Ausubel, David et. al. *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo.* México, Editorial Trillas, 1999.

Azinian, Herminia. *Capacitación docente para la aplicación de geometría en el aula de geometría*, Brasilia: Acta do IV Congreso Iberoamericano do informática na . Educacao, 1998.

Azinian, Herminia. *Resolución de problemas matemáticos, visualización y manipulación con computadora.* Buenos Aires: Novedades Educativas, 1997.

Balderas, Ángel. *Didáctica de las matemáticas en internet. Comunidades educativas y ambientes virtuales*. 21 Ener.2013. http://informaticaeducativa.com/coloquios/mesas/tres/angel/didactica.html

Barrado, Ezequiel. *Pedagogía Participativa.* Buenos Aires, Mc Graw Hill Latinoamericana, 2007.

Barrales Venegas, Marco. *La matemática y sus conexiones.* Duodécima edición, México, Texas Instruments, 2012.

BOEHM, K. W. .*"Experiences with The Geometer's Sketchpad in the Classroom*" in J. R. King and D. Schattschneider (Eds.), Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research. Washington, D. C. The Mathematical Association of America. Cognitions. N.Y.Cambridge University Press, 1997.

Cabello, R. & Levis, D. *Medios informáticos en la educación a principios del siglo XXI.* Buenos Aires, Editorial Prometeo, 2007

Carrillo, Agustín. *Mucho más que Geometría Dinámica*. Madrid: Editorial Ra-Ma, 2009

Cataldi Zulma. *Metodología de diseño, desarrollo y evaluación del software educativo*. 8 de agosto. 2012. http://www.fi.uba.ar/laboratorios/Isi/cataldi-tesisdemagister eninformatica.pdf

Chevallar, Yves et.al. *Estudiar Matemáticas* (El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje). México, Editorial Alfa Omega, 2006.

Dede. Aprendiendo con tecnología. Buenos Aires: Paidós Ibérica, S.A, 2000.

Diaz, Frida y Hernández. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México, D.F: MacGraHill interamericano, 2002

Duval R. 1998. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Grupo editorial Iberoamérica

Esteban, Manuel. *El diseño de aprendizaje constructivista*. 1 de agosto. 2012. http://www.um.es/ead/red/6/documento6.pdf

Feuerstein, Reuven. *Libertad y realización personal*. Santiago: El Mercurio, 1991

Fernández, Francisco, Izquierdo, José y Lima, Silvia. *Experiencias en la estructuración de clases de matemáticas empleando asistentes matemáticos*. 10 marzo.2012. http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/papers/106/

Frederiksen. *Making science accesible to all students.* NewYork: Educación Publicaciones Center, 1998.

Garza, Rosa y Leventhal, Susana. *Aprender como aprender*. México, DF: Trillas, 2004.

Guedez, Maita. *El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo.*12 de abri.2013. http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/17251/2/articulo4.pdf

Hernández, Luis. *Enseñanza Contextual.* Cuenca: Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación, 2011

Hull, Dan. *Opening Minds, Opening Doors.* Washington: Cord Communications, 1993

Jackiw, Nick. La geometría, geometría dinámica para el siglo XXI ver.3.1. Berkley. C:A: key curriculum Press. Software.

Jonassen, David, Carr, Chad y Ping, Hsiu-Ping. *Computers as Mindtools for Engaging Learners in critical thinking*. 12 abril.2012. http://tiger.coe.missouri.edu/jonassen/Mindtools.pdf

Jonassen, David*. Computers in the classroom: Mintools for critical thinking*. New Jersey: Merril Prentice-Hall, 1996

Lynn, McBrian. *The lenguaje of learning*. Washington: Association for Supervision and Curriculum Development, 1997. Tambien disponible en; http://www.ascd.org/readinggroom/books/mcbrien97toc.html.

.Martínez, Salanova. Metodología didáctica para docentes en la formación profesional, Andalucia: Edita Facep, Federación Andaluza de centros de estudios privados, 2000

Marques, Pere. *Los procesos de enseñanza y aprendizaje*. 12 enero.2013. http://deway.uab.es/pmarques/actodid.htm

Maza, Adriana y Cantorell, Lisbeth. *Importancia del manejo de estrategias de aprendizaje para el uso educativo de nuevas tecnologías de información y comunicación en educación.* 2 feb.2013. http://funredes.org/mistica/castellano/ciberoteca/participantes/docuparti/esp_doc_71.html

Mc Forlane. *El aprendizaje y las tecnologías de la Información.* Madrid, Grupo Santillana de Ediciones, 2001

Ministerio De Educación. *El área de matemática en el nuevo Currículo del 2010*. Quito, Editorial Norma, 2011.

Ministerio de Educacion del Ecuador. *Lineamiento curricular para el Bachillerato general unificado.* 15 septiembre. 2012 http://www.educacio.gov.ec/. pdf.

Ministerio De Educación. *Programa de Matemática del Nuevo Bachillerato Ecuatoriano.* Quito, Editorial Norma, 2012.

Mora, jose Antonio. *Geometría dinámica y calculadoras gráficas en matemáticas*. 9 junio 2013. http://jmora7.com/

Nerici, Guiseppe. *Hacia una didáctica general dinámica*, Buenos Aires: Kapelusz, 1973.

Osteiza, Fidel y Silvia, Juan. *Computadores y comunicaciones en el currículo matemático.* 10 may. 2012 http://www.eduteka.org/pdfdir/SilvaMatematicas.pdf

Queralt, Tomas. *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas.* 12 enero.2013. http://www.ti.com/calc/latinoamericana/pdf/Enfoque.pdf

Rios. Javier. *El uso de la tecnología en la clase de matemáticas*. 10 marzo.2012. http://www.niee.ufrgs.br/ribie98/TRABALHOS/126M.PDF

Robutti, Ornella. *Las Calculadoras Graficadores y el Software de Conectividad para Construir una Comunidad de Practicantes de Matemáticas,* Torino, Italia, 2009, http://education.ti.com/es/latinoamerica. pdf [Consulta: Miércoles, 09 de mayo de 2012].

Russel,Jesse y Cohn, Ronald. Texas Instruments Avigo 10. Texas: Book on Demand Ltd, 2012.

Sánchez, Jaime. *Nuevas Ideas en Informática Educativa*, Santiago de Chile, Chile, 2011, http://www.semánticaeduteka.com. pdf [Consulta: Viernes, 22 de junio de 2012].

Sánchez, Margarita. *La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento.* 20 feb.2013. http://redie.ens.uabe.mx/vol4no1/contenidos-omestoy.html

Teran N, Rosemarie. *Visión panorámica de los enfoques pedagógicos actuales*, documento de trabajo, Quito: Prenatal, 2002

Vallejo, Raúl. *Manual de escritura académica.* Quito: Ediciones Fausto Reinoso, 2006

Villavicencio*, Manuel. Escribir en la universidad*. Cuenca: Facultad de Filosofía Letra y Ciencias de la Educación, 2011

Vytgotsky, L. S. *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona. Paidós, 1995.

.

ANEXOS

ENCUESTA 01

Dirigida a los alumnos del décimo año A de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja, para recoger información sobre el uso del software y material concreto en el desarrollo de las prácticas de laboratorio experimentales de geometría

INSTRUCCIONES: Marque con un aspa dentro del paréntesis la opción que considere correcta

_ ¿Cree Ud. que por lo general los alumnos del décimo de E.G.B del Colegio Borja están preparados para el manejo de la tecnología de la información y la comunicación?

( ) Si ( ) No

_ ¿Piensa que por lo general está preparado para desarrollar prácticas de laboratorio de geometría con el uso de software y material concreto?

( ) Si ( ) No

_ ¿Cree Ud. que con la aplicación de prácticas experimentales de laboratorio provistas de software y material concreto se alcanzara un mejor aprendizaje de la geometría

( ) Si ( ) No

_ ¿Serán las prácticas experimentales de laboratorio provistas de software y material concreto una herramienta necesaria para volver el aprendizaje más activo, dinámico y participativo

( ) Si   ( ) No

_ En la actualidad luego de haber experimentado el uso del software y material concreto en las prácticas de laboratorio tú concibes una clase de geometría sin estas herramientas

( ) Si   ( ) No

ENCUESTA 02

Para conocer el grado de satisfacción de los alumnos del décimo año A de Educación General Básica del Colegio Rafael Borja, en el uso del software matemático y material concreto, como herramientas para desarrollar practicas experimentales de laboratorio de geometría

INSTRUCCIONES: Escribe en el recuadro los numerales del 0-1-2-3 según tu valoración.

0= nunca 1=pocas veces 2= casi siempre 3= siempre

_Facilita el uso de nuevas estrategias de aprendizaje ☐

_Permite profundizar tus conocimientos ☐

_Capta tu atención y motivación ☐

_Mejora la participación de los alumnos ☐

_ Individualiza tu aprendizaje ☐

_Facilita tu trabajo escolar ☐

_Facilita el recuerdo de la información reforzando los contenidos ☐

_Muestra satisfacción por el uso de esta herramienta en el aprendizaje de la geometría ☐

_Crea y modifican actitudes positivas ☐

_Crea mayor capacidad para resolver situaciones matemáticas ☐

_Permite el acceso a más información ☐

_Facilita la manipulación el uso del software matemático y del material concreto ☐

_Visualiza y tienes una mejor ubicación espacial de las figuras con el uso del Software matemático ☐

_El uso del software permite guardar y recuperar información para tu reutilización ☐

_ Las actividades prácticas de laboratorio con software y material concreto se realizan mejor en grupos ☐

PRUEBA EXPLORATORIA DE DIAGNOSTICO.

CURSOS: Decimos A y B

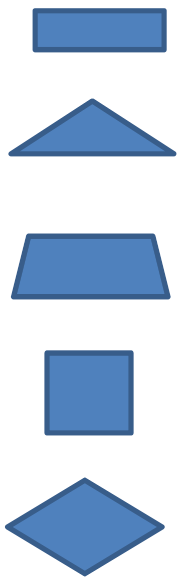
BLOQUE: Geometría

AÑO LECTIVO: 2012- 2013

DOCENTE: Ing. Patricio Abril. P

COLEGIO: Rafael Borja

1) Unir con una línea la figura y la fórmula del área que corresponde:



B x h

$$\frac{D\ x\ d}{2}$$

$$\left[\frac{B+b}{2}\right] h$$

L x L

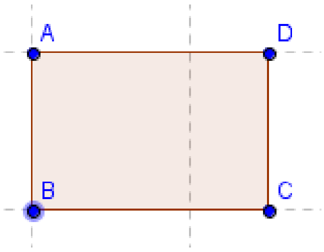
$$\frac{B\ x\ h}{2}$$

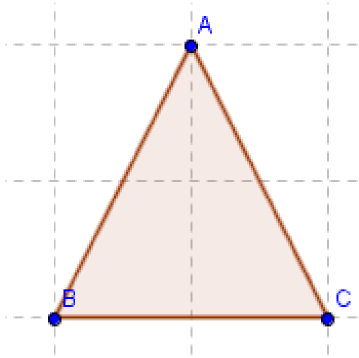
5 puntos.

2) En la siguiente figura dibuje una bisectriz y una diagonal

2 puntos

3) En la siguiente figura dibuje una perpendicular, una mediana y la altura.





2 puntos

4) Complete los siguientes literales:
   a) La suma de los ángulos internos de un triángulo es: …………
   b) La suma de los ángulos internos de un cuadrado es: …………..
   c) Angulo adyacente es: ………………………..
   d) Angulo complementario es: ……………………….
   e) Angulo recto es: ……………………..
   f) Angulo agudo es: ………………….
   g) Angulo obtuso es: ………………………..
   h) Angulo de un giro es: ……………………

   0,5 puntos cada literal para una evaluación sumativa de 4 puntos

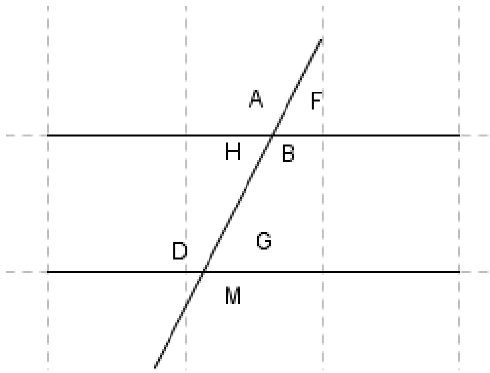
5) En la siguiente grafica escriba el nombre de los ángulos:

A y B…………………

A y D…………………

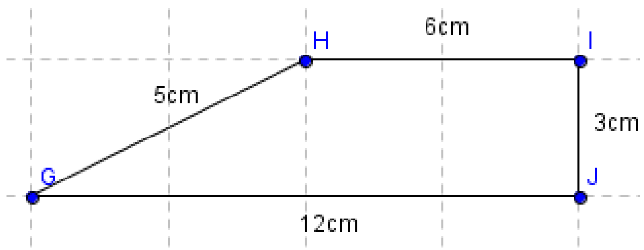
F y G…………………

H y M……………………



2 puntos

6) Calcule el area de la siguiente figura cuyas dimensiones constan en la gráfica:

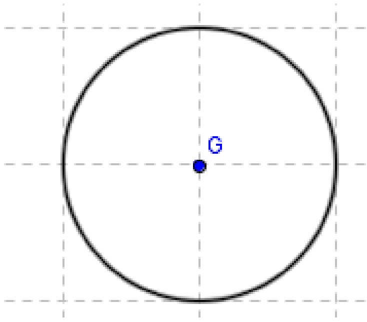


3 puntos

7) Que entiende por figura regular…………………………………………………………

1 punto

8) En la siguiente figura dibuje una tangente y una secante.



1 punto

PRUEBA EXPLORATORIA FINAL.

CURSOS: Decimos A y B

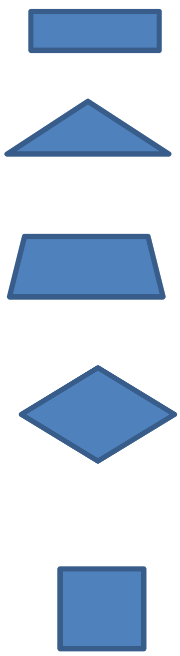
BLOQUE: Geometría

AÑO LECTIVO: 2012- 2013

DOCENTE: Ing. Patricio Abril. P

COLEGIO: Rafael Borja

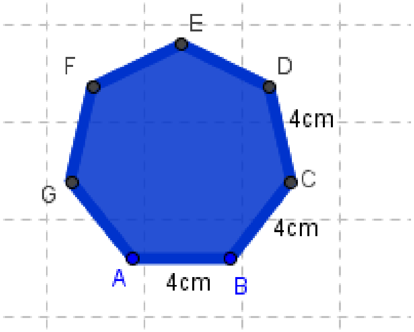
1) Unir con una línea la figura y la fórmula del área que corresponda:



B x h	0,5 P
$\frac{D\ x\ d}{2}$	0,5 p
$\left[\frac{B+b}{2}\right] h$	0,5 p
$\frac{B\ x\ h}{2}$	0,5 p
L x L	0,5 p

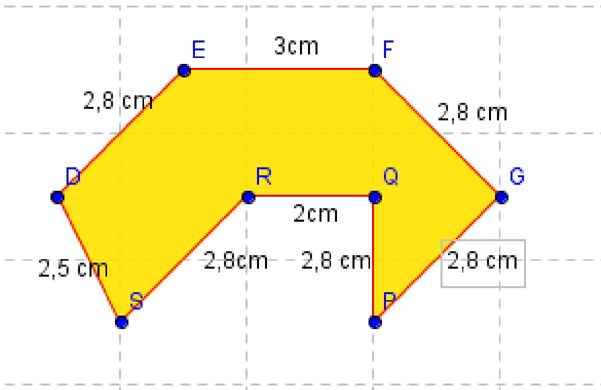
Evaluación sumativa: 2,5 puntos

2) Calcular el área y el perimetro de la siguiente figura regular que tiene 4cm. de lado



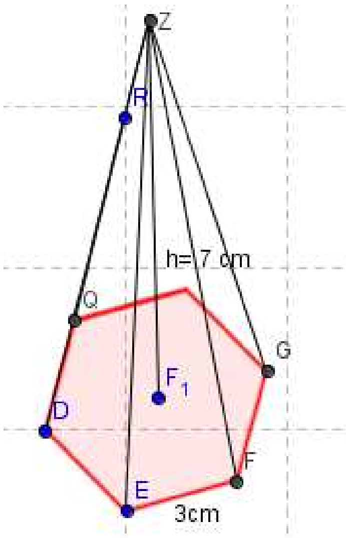
3,5 puntos

3) Calcular el área total, dividiendo la gráfica, en áreas de figuras conocidas:



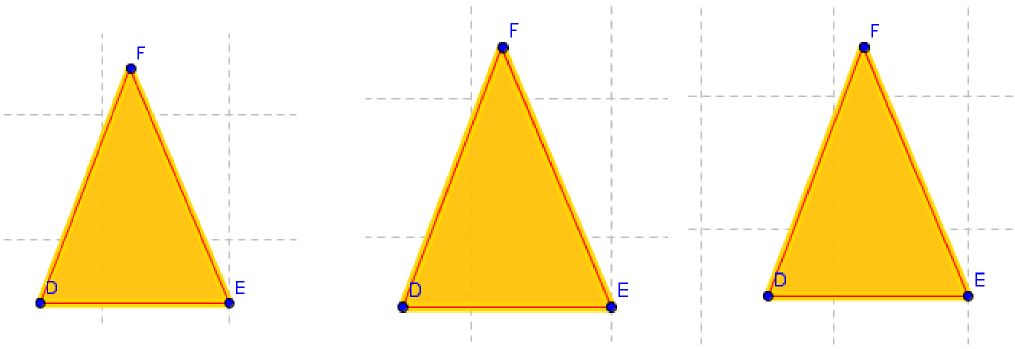
4 puntos

4) Calcular el volumen de un prisma que tiene de altura 7cm y de base un hexágono regular de lado 3cm.



4,5 puntos

5) En las siguientes figuras dibuje el ortocentro, el circuncentro y el baricentro



1.5 puntos

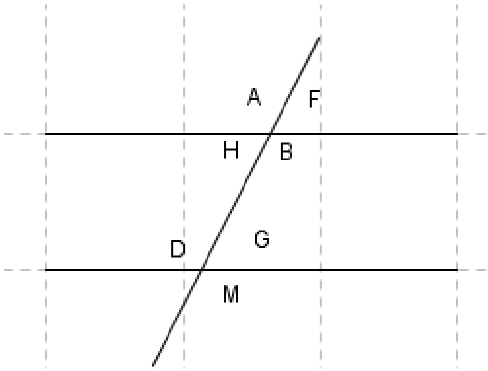
6) En la siguiente grafica escriba el nombre de los siguientes ángulos

A……………………….y D…………………

A ……………........... y M…………………

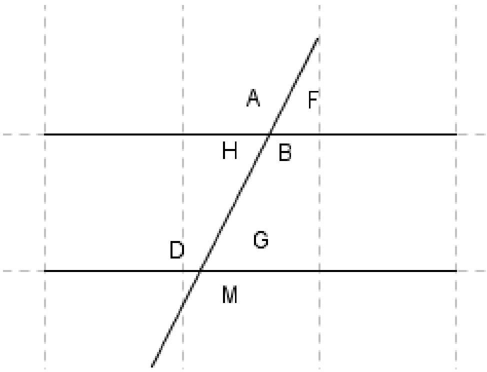
F……………………….y G…………………

H …………….. ……… y .B……………………



1 punto

7) En la siguiente grafica dado el valor de B = 110 grados. Determinar el valor de los otros seis ángulos:



1 punto

8) Complete los siguientes literales:
   i) La suma de los ángulos internos de un triángulo es……………
   j) La suma de los ángulos internos de un cuadrado es…………..
   k) Angulo adyacente es………………………..
   l) Angulo complementario es……………………….

m) Angulo recto es……………………..
n) Angulo agudo es………………….
o) Angulo obtuso es………………………..
p) Angulo de un giro es……………………

Cada literal tendrá una evaluación sumativa de 0,25 puntos, correspondiente a una evaluación sumativa de la pregunta 2 puntos